MARIO LIVIO

ESTE DUMNEZEU MATEMATICIAN?

book HUMANITAS

Mario Livio este astrofizician și lucrează la Space Telescope Science Institute din Baltimore. Munca sa de cercetare îmbrățișează un domeniu vast din astrofizică și cosmologie. A publicat peste patru sute de articole de specialitate, dar ține frecvent conferințe pe teme științifice adresate publicului larg. Este autorul unor cărți de mare succes – *Secțiunea de aur, Ecuația care nu a putut fi rezolvată* și *Gafe strălucite* –, apărute și în traducere românească la Editura Humanitas.

MARIO LIVIO

ESTE DUMNEZEU MATEMATICIAN?

Traducere din engleză de
ANCA FLORESCU-MITCHELL

HUMANITAS
BUCUREȘTI

Redactor: Vlad Zografi
Coperta: Angela Rotaru
Tehnoredactor: Manuela Măxineanu
Corectori: Iuliana Pop, Patricia Rădulescu
DTP: Mihaela Biscărean, Dan Dulgheru

Mario Livio
Is God A Mathematician?
Copyright © 2009 by Mario Livio
Originally published by Simon & Schuster, Inc.
All rights reserved.

Ilustrația copertei: William Blake, *Dumnezeu Arhitectul* (detaliu)

© HUMANITAS, 2018, pentru prezenta versiune românească

ISBN 978-973-50-5971-2 (pdf)

EDITURA HUMANITAS
Piaţa Presei Libere 1, 013701 Bucureşti, România
tel. 021/408 83 50, fax 021/408 83 51
www.humanitas.ro

Comenzi online: www.libhumanitas.ro
Comenzi prin e-mail: vanzari@libhumanitas.ro
Comenzi telefonice: 021.311.23.30

Pentru Sofie

Prefață

Dacă lucrezi în cosmologie – studiul cosmosului în întregul lui – se întâmplă să primești săptămânal câte o scrisoare, un e-mail sau un fax din partea cuiva care vrea să-ți prezinte propria *lui* teorie despre univers (ei, da, întotdeauna e vorba de bărbați). Cea mai mare greșeală pe care o poți face e să răspunzi politicos că ai vrea să afli mai multe. Consecința imediată e un puhoi de mesaje. Cum poți împiedica asaltul? O tactică pe care am găsit-o eficientă (lăsând la o parte impolitețea de a nu răspunde deloc) e să subliniezi un adevăr simplu: atâta vreme cât o teorie nu e formulată precis în limbaj matematic, e imposibil să-i evaluăm relevanța. Acest răspuns îi descurajează pe cei mai mulți cosmologi amatori. Realitatea este că, fără matematică, cosmologii din zilele noastre n-ar putea face nici cel mai mic pas în încercarea de a înțelege legile naturii. Matematica oferă structura de rezistență care susține orice teorie despre univers. Lucrul e cu atât mai surprinzător dacă ne dăm seama că însăși natura matematicii nu este pe deplin lămurită. După cum spunea filozoful britanic Sir Michael Dummett: „Cele mai abstracte discipline intelectuale, filozofia și matematica, provoacă aceeași perplexitate: *cu ce* se ocupă ele? Perplexitatea nu provine doar din ignoranță: chiar și specialiștilor din aceste domenii le e greu să răspundă la întrebare."

În această carte încerc cu modestie să lămuresc unele aspecte ale esenței matematicii, precum și natura relației dintre matematică și lumea pe care o observăm. Desigur, cartea nu se vrea o

istorie cuprinzătoare a matematicii, ci urmărește cronologic evoluția unor concepte importante pentru înțelegerea rolului matematicii în imaginea pe care ne-o facem despre cosmos.

Mulți au contribuit, direct și indirect, timp îndelungat, la ideile prezentate în această carte. Aș vrea să mulțumesc lui Sir Michael Atiyah, Gia Dvali, Freeman Dyson, Hillel Gauchman, David Gross, Sir Roger Penrose, Lord Martin Rees, Raman Sundrum, Max Tegmark, Steven Weinberg și Stephen Wolfram, pentru schimburi de idei foarte folositoare. Îi sunt îndatorat lui Dorothy Morgenstern Thomas pentru permisiunea de a folosi textul complet al relatării lui Oscar Morgenstern despre întâlnirea lui Kurt Gödel cu cei de la Serviciul de Imigrație și Naturalizare al Statelor Unite. William Christens-Barry, Keith Knox, Roger Easton și, în special, Will Noel au avut amabilitatea să-mi dea explicații detaliate în legătură cu eforturile depuse în descifrarea Palimpsestului lui Arhimede. Mulțumiri aparte i se cuvin Laurei Garbolino pentru că mi-a oferit materiale esențiale și documente rare privind istoria matematicii. Mulțumesc, de asemenea, departamentelor colecțiilor speciale de la Universitatea John Hopkins, Universitatea din Chicago și Biblioteca Națională a Franței, pentru că mi-au pus la dispoziție câteva manuscrise rare.

Îi sunt recunoscător lui Stefano Casertano pentru ajutorul acordat la traducerile dificile din latină, precum și doamnelor Elizabeth Fraser și Jill Lagerstrom pentru inestimabilul sprijin bibliografic și lingvistic (însoțit întotdeauna de un zâmbet).

Mulțumiri deosebite i se cuvin lui Sharon Toolan pentru contribuția profesionistă la pregătirea manuscrisului pentru tipar și doamnelor Ann Field, Krista Wildt și Stacey Benn pentru întocmirea anumitor figuri.

Orice autor (sau autoare) ar trebui să se considere norocos (sau norocoasă) dacă s-ar bucura din partea soției (sau soțului) de sprijinul și de răbdarea de care am beneficiat eu din partea soției mele, Sofie, în cursul îndelungatei perioade în care am scris această carte.

În fine, aș vrea să-i mulțumesc agentei mele, Susan Rabiner, fără de a cărei încurajare această carte n-ar fi existat. Îi sunt, de

asemenea, profund îndatorat editorului meu, Bob Bender, pentru lectura atentă a manuscrisului și observațiile pătrunzătoare, Johannei Li pentru sprijinul neprețuit la apariția cărții, Lorettei Danner și lui Amy Ryan pentru tehnoredactare, Victoriei Meyer și lui Katie Grinch pentru promovarea cărții, precum și întregii echipe de producție și marketing de la Editura Simon & Schuster pentru munca ei susținută.

Capitolul 1

Misterul

Cu câțiva ani în urmă am ținut o conferință la Universitatea Cornell. Pe una dintre imaginile proiectate de mine se putea citi: „Este Dumnezeu matematician?“ Îndată ce a apărut imaginea, l-am auzit pe un student din primul rând rostind nervos: „Oh, Doamne, sper că nu!“

Întrebarea mea retorică nu era o încercare filozofică de a-l defini pe Dumnezeu în fața publicului, nici o stratagemă pentru a-i intimida pe cei ce suferă de fobia matematicii. Eu prezentam pur și simplu un mister cu care s-au luptat vreme de secole cele mai originale minți – vădita omniprezență și omnipotență a matematicii. Acestea sunt genul de atribute asociate de regulă doar cu divinitatea. După cum spunea fizicianul britanic James Jeans (1877–1946): „Universul pare să fi fost conceput de un matematician pur.“ Matematica pare să fie uimitor de eficientă în descrierea și explicarea cosmosului în întregul lui, ba chiar și a unora dintre cele mai haotice acțiuni umane.

Fie că fizicienii încearcă să formuleze teorii ale universului, analiștii bursieri se scarpină în cap pentru a prezice următoarea prăbușire a bursei, neurobiologii construiesc modele de funcționare a creierului sau statisticienii serviciilor secrete militare încearcă să optimizeze alocarea resurselor, cu toții folosesc matematica. Mai mult, deși aplică formalisme provenind din diferite ramuri ale matematicii, ei se referă totuși la aceeași matematică globală și coerentă. Ce anume îi conferă matematicii asemenea puteri

incredibile? Sau, așa cum se mira odată Einstein: „Cum e posibil ca matematica, produs al gândirii omenești *independent de experiență* [s. m.], să se potrivească atât de bine cu obiectele realității fizice?“

Acest sentiment de totală uimire nu e nou. Unii filozofi ai Greciei antice, mai cu seamă Pitagora și Platon, priveau cu venerație capacitatea matematicii de a modela și dirija universul, în timp ea nu poate fi modificată, controlată sau influențată de oameni. Filozoful politic englez Thomas Hobbes (1588–1679) nu-și putea nici el ascunde admirația. În *Leviatan*, impresionantă prezentare a ceea ce Hobbes considera a fi temelia societății și a guvernării, acesta scoate în evidență geometria ca paradigmă a argumentării raționale:

> Din moment ce adevărul constă în ordonarea corectă a termenilor în afirmațiile noastre, un om care caută adevărul exact trebuie să-și amintească ce înseamnă fiecare termen pe care îl folosește și să-l așeze la locul lui; altminteri, se va încurca în cuvinte, ca o pasăre prinsă între rămurele lipicioase; cu cât se zbate mai tare, cu atât se lipește mai rău. Prin urmare, în geometrie (singura știință pe care Dumnezeu a binevoit s-o dăruiască omenirii până acum), oamenii încep prin a stabili sensul cuvintelor lor; această stabilire a sensului poartă pentru ei numele de definiții, pe care le așază la începutul calculelor.

Milenii de impresionantă cercetare matematică și de speculație filozofică erudită au adus relativ puțină lumină asupra misterului forței matematicii. Într-un fel, misterul s-a adâncit și mai mult. De pildă, Roger Penrose, renumitul specialist în fizică matematică de la Oxford, percepe acum nu un unic, ci un triplu mister. Penrose identifică trei „lumi“ diferite: *lumea percepțiilor noastre conștiente*, *lumea fizică* și *lumea platoniciană a formelor matematice*. Prima lume este tărâmul tuturor imaginilor noastre mentale – cum percepem chipurile copiilor noștri, cum ne bucurăm de un minunat apus de soare sau cum reacționăm la imaginile cumplite ale războiului. Aceasta e totodată lumea care cuprinde dragostea,

gelozia și prejudecățile, precum și perceperea muzicii, a aromei mâncării și a spaimei. Cea de-a doua lume este cea pe care o numim de regulă realitate fizică. Florile, tabletele de aspirină, norii albi și avioanele cu reacție aparțin acestei lumi, la fel și galaxiile, atomii, inimile de babuin și creierele oamenilor. Lumea platoniciană a formelor matematice, care, pentru Penrose, are o realitate veritabilă, comparabilă cu cea a lumii fizice și a celei mentale, este patria matematicii. Acolo veți întâlni numerele naturale 1, 2, 3, 4…, toate formele și teoremele geometriei euclidiene, legile newtoniene ale mișcării, teoria corzilor, teoria catastrofelor și modelele matematice pentru comportamentul bursei. Iată și cele trei mistere, după Penrose. Mai întâi, lumea realității fizice pare să asculte de legi care rezidă de fapt în lumea formelor matematice. Asta l-a uimit pe Einstein. Eugen Wigner (1902–1995), laureat al Premiului Nobel pentru fizică, era și el pus în încurcătură:

> Miracolul faptului că limbajul matematicii e potrivit pentru a formula legile fizicii este un dar minunat pe care nici nu-l înțelegem, nici nu-l merităm. Ar trebui să fim recunoscători pentru acest dar, să sperăm că el va rămâne valabil în cercetările viitoare și că se va extinde, cu avantajele și dezavantajele sale, spre bucuria, dar și spre nedumerirea noastră, către ramuri vaste ale cunoașterii.

În al doilea rând, înseși minții care percep – sălașul percepțiilor noastre conștiente – au reușit cumva să apară din lumea fizică. Cum s-a născut *mintea* din *materie*? Vom fi vreodată în stare să formulăm o teorie a activității conștiinței care să fie la fel de coerentă și convingătoare ca, de pildă, actuala teorie a electromagnetismului? În fine, cercul se închide în mod misterios. Acele minți care percep au căpătat în chip miraculos acces la lumea matematică, descoperind sau creând un tezaur de forme și concepte matematice abstracte.

Penrose nu oferă o explicație pentru nici unul dintre cele trei mistere, dar conchide laconic: „Fără îndoială că nu există cu adevărat trei lumi, ci *una*, a cărei adevărată natură încă nici n-am

întrezărit-o.“ Este o mărturisire mult mai smerită decât răspunsul profesorului din piesa *Forty Years On* (scrisă de autorul englez Alan Bennett) la o întrebare oarecum asemănătoare:

> Foster: Sunt puțin nelămurit în legătură cu Sfânta Treime, domnule.
> Profesorul: Trei în unul, unul în trei, e foarte simplu. Dacă ai vreo îndoială, du-te la profesorul de matematică.

Misterul e însă şi mai adânc. Succesul matematicii în explicarea lumii înconjurătoare (succes pe care Wigner l-a numit „imprevizibila eficacitate a matematicii“) are două aspecte, unul mai uimitor decât altul. În primul rând, există un aspect care ar putea fi numit „activ“. Când fizicienii hoinăresc prin labirintul naturii, ei îşi luminează calea cu ajutorul matematicii – instrumentele pe care le folosesc şi le perfecționează, modelele pe care le construiesc şi explicațiile pe care le invocă, toate sunt de natură matematică. La prima vedere, acesta e un miracol în sine. Newton a observat căderea unui măr, Luna, mareele de pe plaje (nici măcar nu sunt sigur că le-a văzut pe acestea din urmă), nu ecuații matematice. El a reuşit însă cumva să extragă din toate aceste fenomene naturale legi matematice ale naturii, clare, concise şi incredibil de precise. La fel, atunci când fizicianul scoțian James Clerk Maxwell (1831–1879) a extins cadrul fizicii clasice pentru a include *toate* fenomenele electrice şi magnetice cunoscute la 1860, el a făcut-o cu numai patru ecuații matematice. Gândiți-vă o clipă la acest lucru. Explicația pentru un ansamblu de rezultate experimentale în domeniul electromagnetismului şi al luminii, care fuseseră înainte prezentate în volume întregi, se reducea la patru ecuații succinte. Relativitatea generală a lui Einstein e şi mai uimitoare – este un exemplu perfect de teorie matematică extrem de precisă şi coerentă a ceva fundamental precum structura spațiului şi timpului.

Dar există şi un aspect „pasiv“ al misterioasei eficacități a matematicii, care e atât de surprinzător, încât aspectul „activ“ păleşte prin comparație. Concepte şi relații explorate de matematicieni numai din rațiuni pure – neavând nici o aplicație în minte – se

dovedesc decenii (sau uneori secole) mai târziu a fi soluții neașteptate ale unor probleme ce provin din realitatea fizică! Cum e posibil așa ceva? Să luăm exemplul oarecum amuzant al excentricului matematician britanic Godfrey Harold Hardy (1877–1947). Hardy era atât de mândru că se ocupa doar cu matematica pură, încât declara cu emfază: „Nici o cercetare de-a mea nu a adus și nu va aduce, direct sau indirect, cea mai mică contribuție la confortul lumii.“ Ei bine, s-a înșelat. Una dintre cercetările sale s-a reîncarnat în legea Hardy–Weinberg (numită după Hardy și medicul german Wilhelm Weinberg (1862–1937)), un principiu fundamental folosit de geneticieni pentru a studia evoluția populațiilor. Simplu spus, legea Hardy–Weinberg afirmă că, dacă o populație numeroasă se împerechează absolut la întâmplare (iar migrațiile, mutațiile și selecția nu intervin), atunci zestrea genetică rămâne constantă de la o generație la alta. Chiar și aparent abstractele lucrări ale lui Hardy din *teoria numerelor* – studiul proprietăților numerelor naturale – și-au găsit aplicații neașteptate. În 1973, matematicianul britanic Clifford Cocks a folosit teoria numerelor pentru a face o descoperire în criptografie – crearea codurilor. Descoperirea lui Cocks a făcut să devină caducă o altă afirmație a lui Hardy. În faimoasa sa carte *Apologia unui matematician*, publicată în 1940, Hardy afirma: „Nimeni nu a descoperit vreun scop războinic care să fie servit de teoria numerelor.“ E limpede, Hardy se înșela din nou. Codurile au jucat un rol crucial în comunicațiile militare. Așa încât până și Hardy, unul dintre cei mai vehemenți critici ai matematicii aplicate, a fost „târât“ (probabil zbătându-se și urlând, dacă ar fi fost în viață) în crearea unor teorii matematice folositoare.

Dar acesta nu e decât vârful aisbergului. Kepler și Newton au descoperit că planetele sistemului nostru solar urmează orbite în formă de elipsă – acele curbe studiate de matematicianul grec Menaihmos (pe la 350 î. Cr.) cu două milenii mai devreme. Noile tipuri de geometrie schițate de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) într-o conferință din 1854 devenită clasică s-au dovedit a fi exact instrumentele de care avea nevoie Einstein pentru a explica structura cosmosului. Un „limbaj“ matematic numit teoria

grupurilor, elaborat de prodigiosul tânăr Evariste Galois (1811–1832) pentru a determina solubilitatea ecuațiilor algebrice, a devenit astăzi limbajul folosit de fizicieni, ingineri, lingviști, chiar și antropologi, pentru a descrie toate simetriile din lume. Mai mult, conceptul de modele de simetrie matematică a răsturnat, într-un fel, întregul proces științific. Timp de secole, calea către înțelegerea cosmosului pornea de la un ansamblu de fapte experimentale sau de observație, din care, prin încercări succesive, oamenii de știință încercau să formuleze legi generale ale naturii. Ideea era de a începe cu observații locale și de a construi jocul de puzzle piesă cu piesă. În secolul XX, odată ce s-a înțeles că structura lumii subatomice se sprijină pe concepte matematice bine definite, fizicienii au început să procedeze în sens invers. Ei stabilesc *întâi* principiile de simetrie matematică, impunând apoi legilor naturii și cărămizilor elementare ale materiei să asculte de anumite tipare, și deduc legile generale din aceste condiții. Cum știe natura să asculte de aceste simetrii matematice abstracte?

În 1975, Mitch Feigenbaum, pe atunci tânăr fizician în Laboratorul Național de la Los Alamos, se juca cu calculatorul său de buzunar HP-65. El studia comportarea unei ecuații simple. A observat că un șir de numere care apăreau în calcule se apropia tot mai mult de 4,699… Spre uimirea sa, examinând alte ecuații, apărea din nou același număr bizar. Feingenbaum a tras curând concluzia că descoperise ceva universal, care semnala cumva tranziția de la ordine la haos, deși nu avea nici o explicație pentru acest fapt. După cum era de așteptat, fizicienii au fost la început sceptici. La urma urmelor, de ce ar trebui ca același număr să caracterizeze comportarea unor sisteme care păreau diferite? După șase luni de deliberări, prima lucrare a lui Feigenbaum pe această temă a fost respinsă. Nu peste mult timp însă, experimentele au arătat că, atunci când e încălzit, heliul lichid se comportă exact așa cum prezicea soluția universală a lui Feigenbaum. Iar acesta nu era singurul sistem care se comporta astfel. Uimitorul număr al lui Feigenbaum a apărut în tranziția de la curgerea ordonată a unui fluid la cea turbulentă, ba chiar și în comportarea apei care picură dintr-un robinet.

Lista unor asemenea cazuri în care matematicienii „anticipează“ nevoile diverselor discipline ale generațiilor viitoare poate continua la nesfârșit. Unul dintre cele mai fascinante exemple ale misterioasei și neașteptatei interacțiuni între matematică și lumea reală (fizică) e dat de povestea *teoriei nodurilor* – studiul matematic al nodurilor. Un nod matematic seamănă cu un nod obișnuit de pe o sfoară ale cărei capete sunt unite. Un nod matematic este deci o curbă închisă, fără capete libere. Ciudat lucru, impulsul principal pentru dezvoltarea teoriei matematice a nodurilor a provenit dintr-un model incorect al atomului, elaborat în secolul XIX. Odată ce modelul a fost abandonat – la numai două decenii după ce fusese conceput –, teoria nodurilor a continuat să evolueze ca ramură relativ obscură a matematicii pure. În chip uimitor, acest demers abstract și-a găsit brusc o gamă largă de aplicații, de la structura moleculară a ADN-ului la teoria corzilor – încercarea de a uni lumea subatomică cu gravitația. Mă voi întoarce la această remarcabilă poveste în capitolul 8, pentru că istoria sa circulară este poate cea mai bună dovadă a faptului că ramuri ale matematicii se pot ivi din încercările de a explica realitatea fizică, se îndreaptă apoi către tărâmul abstract al matematicii, pentru a se întoarce până la urmă pe neașteptate la originile lor.

Descoperire sau invenție?

Chiar și scurta prezentare de mai sus oferă deja dovezi copleșitoare că universul e guvernat de matematică sau, cel puțin, poate fi analizat folosind matematica. După cum voi arăta în această carte, multe dintre acțiunile umane, dacă nu toate, par să-și aibă punctul de pornire în matematică, chiar și acolo unde ne așteptăm mai puțin. Să examinăm, de pildă, un exemplu din lumea finanțelor – formula Black–Scholes de evaluare a prețului unei opțiuni (1973).*

* E vorba despre opțiunea pe o acțiune. Pentru detalii privind formula Black–Scholes, vezi Keith Devlin, *Partida neterminată*, Editura Humanitas, București, 2010. (*N. t.*)

Modelul Black–Scholes le-a adus creatorilor săi (Myron Scholes și Robert Carhart Merton; Fisher Black a murit înainte ca premiul să fie decernat) Premiul Nobel pentru economie. Ecuația-cheie a modelului permite estimarea prețului opțiunilor (instrumente financiare care permit cumpărarea sau vânzarea unor acțiuni la o dată ulterioară, la un preț dinainte stabilit). Aici intervine însă un fapt surprinzător. În centrul acestui model se află un fenomen studiat de fizicieni timp de decenii – mișcarea browniană, starea de agitație prezentată de mici particule cum sunt polenul aflat în suspensie în apă sau particulele de fum în aer. Apoi, ca și cum acestea n-ar fi fost de ajuns, aceeași ecuație se aplică și la mișcarea sutelor de mii de stele din aglomerările de stele. Nu e oare acest fapt, după cum se spune în *Alice în Țara Minunilor*, „tot mai ciudat și mai ciudat“? La urma urmelor, indiferent ce e cosmosul, afacerile și finanțele sunt cu siguranță lumi create de mintea omenească.

Sau să considerăm o problemă frecvent întâlnită de fabricanții de panouri electronice și de proiectanții de calculatoare. Aceștia folosesc perforatoare cu laser pentru a face mii de găuri în plăci. Pentru a minimiza costurile, proiectanții de calculatoare nu vor ca perforatoarele să se comporte ca niște „turiști întâmplători“. Problema este de a afla cel mai scurt „tur“ printre găuri, acela care vizitează fiecare poziție a unei găuri o singură dată. S-a dovedit că matematicienii cercetaseră exact această problemă, cunoscută ca *problema comis-voiajorului*, încă din anii 1920. În esență, dacă un comis-voiajor sau un politician aflat în campanie are nevoie să călătorească în modul cel mai economic între un număr dat de orașe, iar prețul călătoriei între fiecare două orașe este cunoscut, atunci călătorul trebuie cumva să găsească cea mai ieftină cale de a vizita toate orașele și de a se întoarce la punctul de plecare. Problema comis-voiajorului a fost rezolvată pentru 49 de orașe din Statele Unite în 1954. Până în 2004, fusese rezolvată pentru 24 978 de orașe din Suedia. Cu alte cuvinte, industria electronică, companiile de transport rutier, ba chiar și fabricanții japonezi de mașini de joc *pachinko* de tip flipper (care trebuie să bată mii de cuie) trebuie

să se bazeze pe matematică pentru lucruri atât de simple precum perforarea, planificarea sau proiectarea fizică a calculatoarelor.

Matematica a pătruns chiar și în domenii care nu erau, în mod tradițional, asociate cu științele exacte. De pildă, există o revistă, *Journal of Mathematical Sociology* (care ajunsese în 2006 la al treizecilea volum), orientată spre înțelegerea matematică a structurilor sociale complexe, a organizațiilor și a grupurilor neoficiale. Articolele din revistă tratează subiecte ce se întind de la modele matematice pentru predicția opiniei publice la cele pentru predicția interacțiunilor în grupurile sociale.

Mergând în cealaltă direcție – de la matematică spre științele umaniste –, domeniul lingvisticii computaționale, care implica inițial numai informaticieni, a devenit acum o cercetare interdisciplinară care reunește lingviști, psihologi cognitiviști, logicieni și specialiști în inteligența artificială, pentru a studia complexitatea limbajelor care au evoluat pe cale naturală.

Ne joacă oare cineva o farsă, astfel încât toate eforturile umane de a înțelege în profunzime conduc până la urmă la dezvăluirea unor domenii matematice tot mai subtile pe baza cărora a apărut universul și, împreună cu el, am apărut noi, făpturile sale complexe? Este matematica, așa cum le place dascălilor să spună, manualul secret, cel după care predă profesorul, dar el le oferă studenților o versiune mult mai simplă, astfel încât să pară cu atât mai înțelept? Sau, ca să folosesc o metaforă biblică, este matematica, într-un anume sens, fructul ultim al pomului cunoașterii?

După cum am văzut pe scurt la începutul acestui capitol, imprevizibila eficacitate a matematicii generează multe întrebări: are matematica o existență complet independentă de mintea umană? Cu alte cuvinte, doar *descoperim* adevărurile matematice, la fel cum astronomii descoperă galaxii necunoscute până atunci? Sau matematica este o *invenție* omenească? Dacă matematica există cu adevărat într-un tărâm abstract al zânelor, care e relația dintre lumea mistică și realitatea fizică? Cum poate creierul uman, cu limitările sale cunoscute, să aibă acces la o asemenea lume imuabilă, în afara spațiului și timpului? Pe de altă parte, dacă matematica

e doar o invenție omenească și nu are nici o existență în afara minților noastre, cum putem explica faptul că inventarea atâtor adevăruri matematice anticipează în mod miraculos întrebări legate de cosmos și de viața umană care au fost puse abia secole mai târziu? Nu e ușor de răspuns la aceste întrebări. După cum voi arăta în această carte, nici măcar matematicienii zilelor moderne, specialiștii în științe cognitive și filozofii nu cad de acord asupra răspunsurilor. În 1989, matematicianul francez Alain Connes, laureat a două dintre cele mai prestigioase premii în matematică, Medalia Fields (1982) și Premiul Crafoord (2001), și-a exprimat foarte clar punctul de vedere:

> Să luăm, de pildă, numerele prime [cele care se împart doar la unu și la ele însele] care, în ce mă privește, constituie o realitate mai stabilă decât realitatea materială înconjurătoare. Matematicianul activ poate fi asemănat cu un explorator care își propune să descopere lumea. Descoperim fapte fundamentale prin experiență. Făcând calcule simple, ne dăm seama, de pildă, că șirul numerelor prime pare să fie nesfârșit. Atunci, misiunea matematicianului este să demonstreze că există o infinitate de numere prime. Acesta e, firește, un vechi rezultat care i se datorează lui Euclid. Una dintre cele mai interesante consecințe ale acestei demonstrații este că, dacă cineva pretinde într-o bună zi că a găsit cel mai mare număr prim, va fi ușor de arătat că se înșală. Același lucru e valabil pentru orice demonstrație. Ne izbim aici de o realitate la fel de incontestabilă ca realitatea fizică.

Martin Gardner, faimosul autor al cărților de matematică distractivă, este și el de părere că matematica e *descoperire*. Pentru el, nu încape îndoială, numerele și matematica au propria lor existență, indiferent dacă oamenii își dau sau nu seama. „Dacă doi dinozauri se alătură altor doi dinozauri într-o poiană, a spus el odată, vor fi acolo patru dinozauri, chiar dacă nu se află în preajmă nici un om care să observe, iar animalele sunt prea proaste ca să știe lucrul ăsta.“ După cum sublinia Connes, partizanii „matematicii-

ca-descoperire“ (care se conformează, după cum vom vedea, perspectivei platoniciene) subliniază faptul că, odată ce un concept matematic e înțeles, să zicem numerele naturale 1, 2, 3, 4 …, ne lovim de fapte indeniabile, de pildă $3^2 + 4^2 = 5^2$, indiferent ce credem despre aceste relații. Acest lucru dă cel puțin impresia că suntem în contact cu o realitate existentă.

Alții nu sunt de acord. În recenzia cărții în care Connes își prezenta ideile, matematicianul britanic Sir Michael Atiyah (laureat al Medaliei Fields în 1966 și al Premiului Abel în 2004) remarca:

> Orice matematician trebuie să simpatizeze cu Connes. Simțim cu toții că întregii sau cercurile există cu adevărat într-un sens abstract, iar perspectiva platoniciană [pe care o voi prezenta în detaliu în capitolul 2] e extrem de seducătoare. Dar o putem într-adevăr susține? Dacă universul ar fi fost unidimensional sau chiar discret*, este greu de văzut cum ar fi evoluat geometria. Poate să pară că întregii stau pe baze mai solide și că numărătoarea e cu adevărat o noțiune primordială. Dar să ne închipuim că inteligența ar aparține nu rasei umane, ci unei uriașe meduze solitare și izolate din adâncurile Oceanului Pacific. Ea nu ar avea experiența obiectelor individuale, ci doar a apei înconjurătoare. Mișcarea, temperatura și presiunea i-ar furniza datele senzoriale de bază. Într-un asemenea continuu pur, lumea discretă nu s-ar ivi și nu ar fi nimic de numărat.

Atiyah crede deci că „omul *a creat* [sublinierea îmi aparține] matematica idealizând și abstractizând elemente din lumea fizică“. Lingvistul George Lakoff și psihologul Rafael Núñez sunt de aceeași părere. În cartea lor *De unde provine matematica*, ei conchid: „Matematica este o parte naturală a ființei umane. Ea apare din trupurile, creierele și experiențele noastre zilnice în lumea înconjurătoare.“

---

* În matematică, „discret“ e antonimul lui „continuu“. (*N. t.*)

Punctul de vedere al lui Atiyah, Lakoff și Núñez ridică altă întrebare interesantă. Dacă matematica e o invenție pe deplin umană, este ea într-adevăr universală? Cu alte cuvinte, dacă ar exista civilizații extraterestre, ar inventa ele aceeași matematică? Carl Sagan (1934–1996) credea că răspunsul la ultima întrebare este afirmativ. În cartea sa *Cosmos*, vorbind despre ce tip de semnal ar transmite în spațiu o civilizație inteligentă, el spune: „Este extrem de improbabil ca un proces fizic natural oarecare să poată transmite mesaje radio conținând numai numere prime. Dacă am primi un asemenea mesaj, am deduce că există undeva o civilizație căreia, cel puțin, îi plac numerele prime.“ Dar cât de sigur e acest fapt? În recenta sa carte *Un nou tip de știință*, specialistul în fizică matematică Stephen Wolfram susține că ceea ce numim „matematica noastră“ poate fi doar o posibilitate dintr-o bogată diversitate de „arome“ ale matematicii. De pildă, în loc să folosim reguli bazate pe ecuații matematice pentru a descrie natura, am putea folosi tipuri diferite de reguli, încorporate în programe de calculator simple. Mai mult, unii cosmologi au discutat recent chiar și posibilitatea ca universul nostru să nu fie decât un element al unui *multivers* – un ansamblu uriaș de universuri. Dacă un asemenea *multivers* ar exista într-adevăr, ne-am aștepta oare ca celelalte universuri să aibă aceeași matematică?

Specialiștii în biologie moleculară și cei în științe cognitive aduc în discuție o altă perspectivă, bazată pe studiul facultăților creierului. Pentru unii dintre ei, matematica nu e foarte diferită de limbaj. Cu alte cuvinte, în acest scenariu „cognitiv“, după mii și mii de ani în care oamenii s-au holbat la două mâini, doi ochi și doi sâni, a apărut definiția abstractă a numărului 2, foarte asemănător modului în care cuvântul „pasăre“ a ajuns să reprezinte multe animale cu două aripi care pot zbura. După cum spunea neurologul Jean-Pierre Changeux: „Pentru mine, metoda axiomatică [folosită, de pildă, în geometria euclidiană] este expresia facultăților cerebrale legate de folosirea creierului uman, căci ceea ce caracterizează limbajul este tocmai caracterul său generator.“ Dar, dacă matematica nu e decât un alt limbaj, cum putem explica faptul că,

deși copiii învață cu ușurință limbile, multora li se pare atât de greu să studieze matematica? Marjory Fleming (1803–1811), copil-minune din Scoția, a descris minunat greutățile de care se lovesc elevii în studiul matematicii. Fleming, care n-a trăit să se bucure de cea de-a noua aniversare a zilei sale de naștere, a lăsat în urmă jurnale ce conțin peste nouă mii de cuvinte în proză și cinci sute de versuri. Ea se plânge într-un loc: „Am să vă vorbesc acum despre cumplita și ticăloasa pedeapsă la care mă supune tabla înmulțirii; nici nu vă puteți închipui. Lucrul cel mai diabolic este 8 ori 8 și 7 ori 7; natura însăși nu poate îndura așa ceva."

Câteva dintre elementele întrebărilor complicate pe care le-am prezentat pot fi reformulate: există vreo diferență fundamentală între matematică și alte expresii ale spiritului uman, ca artele plastice sau muzica? Dacă nu există, de ce matematica are un remarcabil caracter coerent și necontradictoriu care nu pare să fie prezent în nici o altă creație umană? Geometria lui Euclid, de pildă, rămâne la fel de corectă astăzi (acolo unde se aplică) cum era și în anul 300 î. Cr; ea reprezintă „adevăruri" care ne sunt impuse. Dimpotrivă, astăzi nu suntem obligați să ascultăm aceeași muzică pe care o ascultau vechii greci, nici să acceptăm modelul naiv al lui Aristotel privind cosmosul.

Foarte puține subiecte științifice de azi folosesc încă idei vechi de trei mii de ani. Pe de altă parte, cele mai recente cercetări în matematică se pot referi la teoreme care au fost publicate anul trecut sau săptămâna trecută, dar pot folosi și formula suprafeței sferei demonstrată de Arhimede pe la 250 î. Cr.! Modelul atomic bazat pe teoria nodurilor din secolul XIX n-a supraviețuit decât două decenii, pentru că noi descoperiri au dovedit că unele elemente ale teoriei erau greșite. Așa progresează știința. Newton le-a fost recunoscător (sau nu! vezi capitolul 4) pentru perspectiva sa vastă acelor uriași pe umerii cărora s-a urcat. Și-ar fi putut de asemenea cere iertare față de acei uriași ale căror lucrări au devenit depășite din pricina sa.

Nu la fel se întâmplă lucrurile în matematică. Chiar dacă formalismul necesar demonstrării anumitor rezultate s-a schimbat,

rezultatele matematice însele nu se schimbă. De fapt, după cum a spus odată matematicianul Ian Stewart, „Există un cuvânt în matematică pentru rezultatele anterioare care sunt apoi modificate – se numesc pur și simplu *greșeli*“. Iar ele sunt considerate greșeli nu din pricina unor noi descoperiri, ca în alte științe, ci din pricina unei raportări mai atente și mai riguroase la aceleași vechi adevăruri matematice. Face oare acest lucru ca matematica să fie limba maternă a lui Dumnezeu?

În cazul în care găsiți că nu e important să înțelegeți dacă matematica a fost inventată sau descoperită, gândiți-vă ce încărcătură capătă diferența dintre „inventat“ și „descoperit“ în întrebarea: Dumnezeu a fost inventat sau descoperit? Sau, și mai provocator: Dumnezeu i-a creat pe oameni după chipul și asemănarea lui sau oamenii l-au inventat pe Dumnezeu după chipul și asemănarea lor?

În cartea de față voi încerca să abordez multe dintre aceste întrebări stranii și răspunsurile lor tulburătoare. Voi trece astfel în revistă descoperirile unora dintre cei mai mari matematicieni, fizicieni, filozofi, specialiști în științe cognitive și lingviști din secolele trecute și din prezent. Voi cerceta și opiniile, obiecțiile și rezervele multor gânditori moderni. Începem această călătorie captivantă cu perspectiva întemeietoare a filozofilor din Antichitate.

Capitolul 2

Misticii: Numerologul și filozoful

Oamenii au fost dintotdeauna stăpâniți de dorința de a înțelege cosmosul. Eforturile lor de-a da de capăt întrebării „Ce înseamnă toate acestea?“ le-au depășit cu mult pe cele necesare doar supraviețuirii, îmbunătățirii situației economice sau calității vieții. Ceea ce nu înseamnă că toată lumea a fost tot timpul angajată activ în căutarea vreunei ordini naturale sau metafizice. Oamenii care se luptă pentru supraviețuire rareori își permit luxul de a medita la sensul vieții. În galeria celor care s-au străduit să găsească tiparele ce stau la baza complexității vizibile a universului, câțiva s-au ridicat cu mult deasupra celorlalți.

Pentru mulți, numele matematicianului, savantului și filozofului René Descartes (1596–1650) e sinonim cu nașterea epocii moderne a filozofiei științei. Descartes a fost unul dintre principalii arhitecți ai tranziției de la descrierea lumii naturale prin proprietățile percepute direct de simțurile noastre la explicații exprimate prin cantități matematice bine definite. În loc să caracterizeze vag sentimente, mirosuri, culori și senzații, Descartes a căutat explicații științifice pentru a sonda la nivel fundamental și pentru a folosi limbajul matematicii:

> Nu recunosc nici o materie în lucrurile corporale în afară de cea pe care geometrii o numesc *cantitate* și pe care o folosesc în demonstrațiile lor […] și, cum toate fenomenele naturale pot fi explicate în acest fel, nu cred că alte principii sunt acceptabile sau de dorit în fizică.

E interesant de observat că Descartes excludea din marea sa perspectivă ştiinţifică tărâmurile „gândului şi minţii“, pe care le considera independente de lumea explicabilă matematic a materiei. Deşi Descartes a fost fără îndoială unul dintre gânditorii cu cea mai mare influenţă din ultimele patru secole (şi mă voi întoarce la el în capitolul 4), nu el este primul care a acordat matematicii un rol central. Idei radicale privind un cosmos impregnat şi guvernat de matematică – idei care, într-un anume sens, mergeau chiar mai departe decât cele ale lui Descartes – au fost pentru prima dată exprimate, deşi cu o puternică nuanţă mistică, cu mai bine de două milenii în urmă. Cel care, potrivit legendei, spunea că sufletul ajunge la „armonie“ când se ocupă cu matematica pură a fost enigmaticul Pitagora.

Pitagora

Pitagora (cca 572–497 î. Cr.) a fost pesemne primul filozof care s-a ocupat deopotrivă de cercetarea naturii şi de viaţa spirituală – om de ştiinţă şi, în acelaşi timp, gânditor religios plin de har. Se crede că el a introdus termenii „filozofie“, însemnând dragoste de înţelepciune, şi „matematică“ – studiu. Deşi nu s-a păstrat nici una dintre scrierile lui Pitagora (dacă aceste scrieri vor fi existat vreodată, căci multe lucruri au fost comunicate oral), avem trei biografii amănunţite ale lui Pitagora, nu întru totul demne de încredere, datând din secolul III. O a patra biografie, anonimă, s-a păstrat în scrierile patriarhului şi filozofului bizantin Photios (cca 820–891). Principala dificultate în încercarea de a stabili contribuţiile personale ale lui Pitagora ţine de faptul că adepţii şi discipolii săi – pitagoricienii – i-au atribuit mereu toate ideile lor. Ca urmare, până şi lui Aristotel (384–322 î. Cr.) i se pare greu de identificat în ce proporţie filozofia pitagoreică îi poate fi atribuită cu certitudine lui Pitagora însuşi, drept care vorbeşte în general despre „pitagoricieni“ şi „cei numiţi pitagoricieni“. Totuşi, dată fiind faima lui Pitagora în tradiţia ulterioară, se presupune că acesta s-a

aflat la originea cel puțin a unora dintre teoriile pitagoreice prețuite de Platon și chiar de Copernic.

Este aproape cert că Pitagora s-a născut la începutul secolului VI î. Cr. pe insula Samos, aproape de coasta Turciei de azi. Se pare că a călătorit mult în prima parte a vieții, mai ales în Egipt și poate în Babilon, unde va fi primit cel puțin o parte din educația sa matematică. În cele din urmă, a emigrat într-o mică colonie grecească, la Crotona, în sudul Italiei, unde un grup entuziast de elevi și discipoli s-a adunat repede în jurul său.

Istoricul grec Herodot (cca 485–425 î. Cr.) îl numește pe Pitagora „cel mai înzestrat filozof între greci", iar filozoful și poetul presocratic Empedocle (cca 492–432 î. Cr.) adaugă plin de admirație:

Printre aceștia trăia un bărbat învățat fără seamăn
Care avea în păstrare tezaur de-aleasă știință;
El stăpânea meșteșuguri din cele mai felurite,
De câte ori deci se încorda cu forțele-i toate,
El ușor observa orice lucru din tot ce există
*Vreme de zece, vreme de douăzeci, vârste de oameni.**

Nu toți erau însă la fel de impresionați. În comentarii care par să se tragă dintr-o rivalitate personală, filozoful Heraclit din Efes (cca 535–475 î. Cr.) recunoaște vastele cunoștințe ale lui Pitagora, dar se grăbește să adauge: „Mulțimea cunoștințelor nu te învață să ai minte; altfel i-ar fi învățat pe Hesiod [poet grec care a trăit pe la 700 î. Cr.] și pe Pitagora."

Pitagora și primii pitagoricieni nu erau nici matematicieni, nici oameni de știință în sensul strict al acestor termeni. În centrul doctrinelor lor se află mai curând o filozofie metafizică a sensului numerelor. Pentru pitagoricieni, numerele erau în același timp entități vii și principii universale, impregnând totul, de la cer la etica umană. Cu alte cuvinte, numerele aveau două aspecte distincte,

* Citatele din filozofii presocratici sunt din *Filosofia greacă până la Platon*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1979. (*N. t.*)

complementare. Pe de o parte, aveau o existență fizică tangibilă; pe de alta, erau prescripții abstracte pe care se întemeia totul. De pildă, *monada* (numărul 1) era înțeleasă atât ca generatoare a tuturor celorlalte numere, o entitate la fel de reală ca apa, aerul și focul care participau la structura lumii fizice, cât și ca idee – unitatea metafizică la originea întregii creații. Englezul Thomas Stanley (1625–1678), istoric al filozofiei, a caracterizat minunat (în engleza veacului XVII) cele două înțelesuri pe care pitagoricienii le asociau numerelor:

> Numerele sunt de două feluri: Mental (sau imaterial) și Util. Mentalul este acea substanță eternă a Numărului despre care Pitagora, în scrierea lui despre zei, spune că este *principiul providențial al Cerului și al Pământului, precum și al naturii care se află între ele.* […] Acesta e ceea ce se numește *principiul, izvorul și rădăcina tuturor lucrurilor* […]. Numărul Util este ceea ce Pitagora definește ca *extinderea și traducerea în act a cauzelor embrionare care se află în Monadă sau în mai multe Monade*.

Numerele nu erau deci simple instrumente pentru a desemna cantități sau sume, ci ele trebuiau descoperite, erau agenții formatori care acționează în natură. Totul în univers, de la obiectele materiale precum Pământul la conceptele abstracte precum dreptatea, era număr.

Faptul că cineva găsește numerele fascinante nu e surprinzător în sine. La urma urmelor, chiar numerele obișnuite din viața de zi cu zi au proprietăți interesante. Să luăm numărul de zile dintr-un an – 365. Puteți lesne vedea că 365 este egal cu suma a trei pătrate consecutive: $365 = 10^2 + 11^2 + 12^2$. Dar asta nu e tot; el este de asemenea egal cu suma următoarelor două pătrate ($365 = 13^2 + 14^2$)! Sau să examinăm numărul zilelor din luna lunară – 28. Acest număr e suma tuturor divizorilor săi (numerele la care se împarte fără rest): $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Numerele cu această proprietate se numesc *numere perfecte* (primele patru numere perfecte sunt 6, 28, 496, 8218). Să observăm și că 28 este suma cuburilor

primelor două numere impare: $28 = 1^3 + 3^3$. Chiar și un număr atât de larg folosit în sistemul nostru zecimal cum este 100 are particularitățile sale: $100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$. E clar, numerele ne pot uimi. Și totuși, care e originea doctrinei pitagoreice a numerelor? Cum a apărut ideea nu numai că tuturor lucrurilor li se asociază un număr, dar că toate lucrurile *sunt* numere? Din moment ce Pitagora fie n-a scris nimic, fie scrierile sale se vor fi pierdut, nu e ușor de răspuns la această întrebare. Ne putem face o imagine despre argumentele lui Pitagora bazându-ne pe câteva fragmente presocratice și pe comentarii ulterioare, nu întru totul demne de încredere, în majoritate aparținând filozofilor platonicieni și aristotelicieni. Imaginea ce reiese din coroborarea diferitelor indicii arată că explicația pentru obsesia numerelor poate fi găsită în interesul pitagoricienilor pentru două activități aparent neînrudite: experimentele muzicale și observarea cerului.

Pentru a înțelege cum se materializau aceste misterioase legături dintre numere, cer și muzică, trebuie să pornim de la interesanta observație că pitagoricienii *reprezentau* numerele cu ajutorul pietricelelor sau al punctelor. De pildă, ei aranjau numerele naturale 1, 2, 3, 4… în ansambluri de pietricele formând triunghiuri (ca în figura 1). În particular, triunghiul construit din primele patru numere întregi (aranjate într-un triunghi cu zece pietricele) se numea *tetraktys* (însemnând pătrar sau „cuaternitate“) și simboliza pentru pitagoricieni desăvârșirea și însușirile care o presupun. Acest fapt e menționat într-o istorisire despre Pitagora aparținându-i autorului satiric grec Lucian (cca 120–180 d. Cr.). Pitagora îi cere cuiva să numere. Omul începe să numere, Pitagora îl întrerupe: „Vezi? Ceea ce iei drept 4 este 10, un triunghi perfect și jurământul nostru.“ Filozoful neoplatonician Iamblichos (cca 250–325 d. Cr.) ne spune că, într-adevăr, jurământul pitagoricienilor era:

> *Da! Jur pe cel ce-a dăruit seminției noastre* tetraktys-*ul,*
> *Număr ce cuprinde izvorul și rădăcina veșnic curgătoarei naturi.*

Figura 1

De ce era *tetraktys*-ul atât de venerat? Pentru că, în ochii pitagoricienilor din secolul VI î. Cr., părea să reprezinte întreaga natură a universului. În geometrie – trambulina către formidabila revoluție greacă în gândire –, numărul 1 reprezenta un punct •, 2 reprezenta o linie •–•, 3 reprezenta o suprafață , iar 4 reprezenta un tetraedru tridimensional . *Tetraktys*-ul părea deci să cuprindă toate dimensiunile spațiului așa cum îl percepem.

Dar acesta era doar începutul. *Tetraktys*-ul și-a făcut apariția neașteptată chiar și în abordarea științifică a muzicii. Se consideră în genere că Pitagora și pitagoricienii au descoperit că împărțirea unei corzi la întregi consecutivi produce armonice și intervale consonante – ceee ce se poate observa la orice concert al unui cvartet de coarde. Când două corzi asemănătoare sunt atinse simultan, sunetul rezultant este plăcut dacă lungimile corzilor se află în rapoarte simple. De pildă, corzi de lungime egală (raport 1:1) produc un unison; un raport de 1:2 produce o octavă; 2:3 produce o cvintă perfectă; iar 3:4, cvarta perfectă. Prin urmare, în plus față de atributele sale spațiale atotcuprinzătoare, se putea considera că *tetraktys*-ul reprezintă raporturile matematice care stau la baza armoniei gamei muzicale. Această aparent magică unitate dintre spațiu și muzică a generat pentru pitagoricieni un simbol puternic și le-a dat sentimentul *armoniei* („potrivirea împreună“) *cosmosului* („frumoasa ordine a lucrurilor“).

Ce loc ocupă cerul în toată povestea asta? Pitagora și pitagoricienii au jucat în istoria astronomiei un rol care, fără să fie esențial, nu a fost neglijabil. Ei s-au numărat printre primii care au susținut că Pământul are formă sferică (probabil din pricina superiorității

matematico-estetice a sferei). Au fost probabil și cei dintâi care au afirmat că planetele, Soarele și Luna posedă propria lor mișcare independentă, de la vest spre est, în direcție opusă rotației (aparente) diurne a sferei stelelor fixe. Cele mai frapante proprietăți ale constelațiilor – forma și numărul – nu le puteau scăpa acestor observatori entuziaști ai cerului nocturn. Fiecare constelație e recunoscută după numărul de stele care o compun și după figura geometrică pe care o formează ele. Dar aceste două însușiri erau tocmai ingredientele esențiale ale doctrinei pitagoreice a numerelor, după cum e exemplificată prin *tetraktys*. Pitagoricienii erau atât de fascinați de dependența de numere a figurilor geometrice, a constelațiilor și a armoniilor muzicale, încât numerele au devenit atât cărămizile care alcătuiau universul, cât și principiile pe care se întemeia existența sa. Nu e de mirare că dictonul lui Pitagora afirma cu tărie: „Totul e potrivit după număr."

Două dintre observațiile lui Aristotel arată în ce măsură pitagoricienii luau în serios acest dicton. În *Metafizica* sa, Aristotel spune: „… cei numiți pitagoricieni sunt primii care să se fi apucat de matematici, pe care le-au făcut să progreseze. Hrăniți, așadar, cu matematici, ei au socotit că principiile acestora sunt și principiile tuturor lucrurilor."* În alt pasaj, Aristotel descrie plastic veneрația față de numere și rolul aparte al *tetraktys*-ului: „Eurytos [elev al pitagoricianului Philolaos] a stabilit care este numărul unui anume lucru […] [d]e pildă, acest număr este al omului, celălalt al calului – *precum fac cei care aplică numerele la figuri – triunghi, pătrat, în acest fel ei închipuie formele vietăților cu pietricele*." Ultima propoziție („figuri – triunghi, pătrat") trimite atât la *tetraktys*, cât și la altă fascinantă construcție pitagoreică – gnomonul.

Cuvântul „gnomon" („indicator") își trage originea din numele unui dispozitiv astronomic babilonian de măsurare a timpului, asemănător cadranului solar. Se pare că acest aparat a fost introdus în Grecia de profesorul lui Pitagora – filozoful naturii Anaximandru

---

* Aristotel, *Metafizica*, traducere de Andrei Cornea, Editura Humanitas, București, 2001. (*N. red.*)

(cca 611–547 î. Cr.). Nu încape îndoială că elevul a fost influențat de ideile geometrice ale dascălului său și de aplicarea lor la *cosmologie* – studiul universului în întregul lui. Mai târziu, termenul „gnomon“ a fost folosit pentru un instrument de trasat unghiuri drepte, asemănător cu echerul tâmplarului, sau pentru figura în unghi drept care, atunci când e adăugată unui pătrat, produce un pătrat mai mare (ca în figura 2). Observați că, dacă adăugați, de pildă, unui pătrat 3 × 3 șapte pietricele într-o formă care alcătuiește un unghi drept (un gnomon), obțineți un pătrat compus din șaisprezece (4 × 4) pietricele.

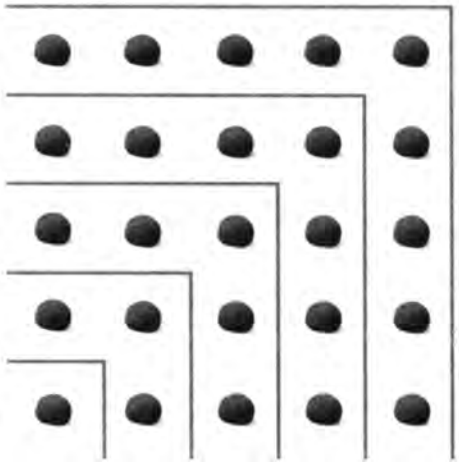


Figura 2

Aceasta e o reprezentare figurativă a următoarei proprietăți: în șirul întregilor impari 1, 3, 5, 7, 9…, suma oricărui număr de termeni succesivi (începând cu 1) formează întotdeauna pătratul unui număr. De pildă: $1 = 1^2$, $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ etc. Pitagoricienii priveau această relație intimă dintre gnomon și pătratul pe care îl „cuprinde“ ca pe un simbol al cunoașterii în general, în care cunoașterea „îmbrățișează“ cunoscutul. Numerele nu se limitau

deci la descrierea lumii fizice, ci se presupunea că se aflau și la rădăcina proceselor mentale și afective.

Numerele pătrate asociate cu gnomoanele au fost pesemne precursorii faimoasei *teoreme a lui Pitagora*. Această celebră afirmație matematică spune că pentru orice triunghi dreptunghic (figura 3), un pătrat desenat pe ipotenuză are o arie egală cu suma pătratelor desenate pe laturi. Descoperirea teoremei a fost „documentată“ umoristic într-o faimoasă caricatură *Frank & Ernest** (figura 4). Așa cum arată gnomonul din figura 2, adăugarea unui gnomon număr pătrat, $9 = 3^2$, unui pătrat 4×4 produce un nou pătrat 5×5: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Numerele 3, 4 ,5 pot deci reprezenta lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic. Numerele întregi cu această proprietate (de exemplu 5, 12, 13, din moment ce $5^2 + 12^2 = 13^2$) se numesc „triplete pitagoreice“.

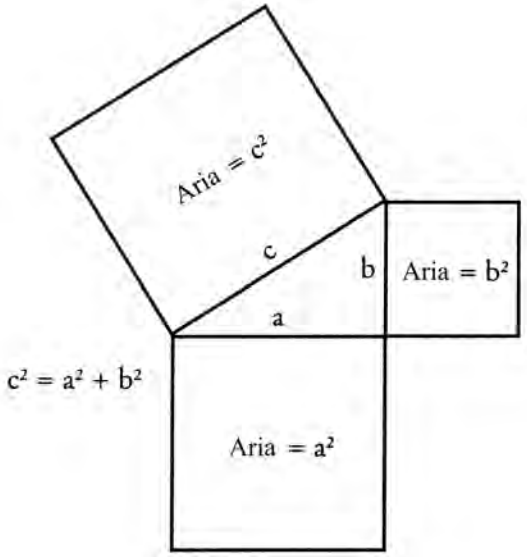


Figura 3

* Benzi desenate aparținând caricaturistului american Bob Thaves. (*N. t.*)

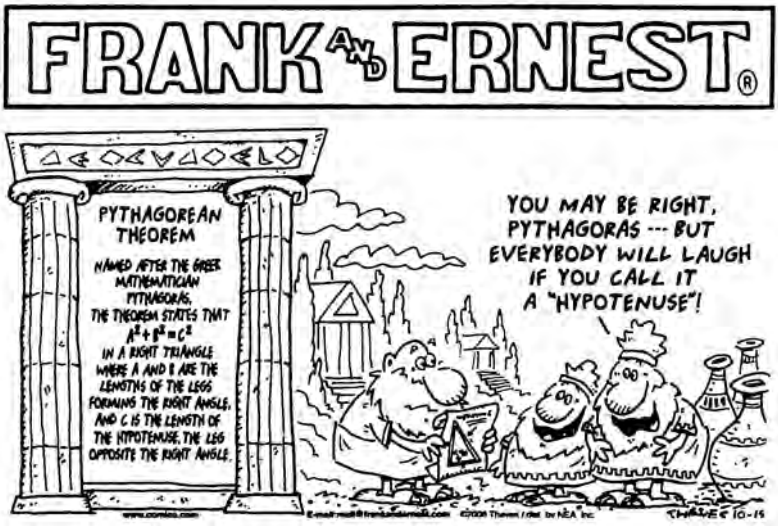

FRANK AND ERNEST®
PYTHAGOREAN THEOREM
NAMED AFTER THE GREEK MATHEMATICIAN PYTHAGORAS. THE THEOREM STATES THAT $A^2+B^2=C^2$ IN A RIGHT TRIANGLE WHERE A AND B ARE THE LENGTHS OF THE LEGS FORMING THE RIGHT ANGLE, AND C IS THE LENGTH OF THE HYPOTENUSE, THE LEG OPPOSITE THE RIGHT ANGLE.
YOU MAY BE RIGHT, PYTHAGORAS --- BUT EVERYBODY WILL LAUGH IF YOU CALL IT A "HYPOTENUSE"!

Figura 4
S-ar putea să ai dreptate, Pitagora… dar toată lumea o să râdă de tine dacă o numești "ipotenuză"!

Puține teoreme matematice se bucură de celebritatea teoremei lui Pitagora. În 1971, când Republica Nicaragua a ales „zece ecuații matematice care au schimbat fața lumii" ca temă a unei serii de timbre, teorema lui Pitagora a apărut pe cel de-al doilea timbru (figura 5; primul timbru reprezenta „1 + 1 = 2").

A fost Pitagora cu adevărat primul care a formulat binecunoscuta teoremă ce i se atribuie? Așa credeau, fără îndoială, unii dintre istoricii greci antici. Într-un comentariu la *Elementele* – masivul tratat de geometrie și teoria numerelor scris de Euclid (cca 325–265 î. Cr.) – filozoful grec Proclos (cca 411– 485 d. Cr.) scria: „Dacă vrea cineva să dea ascultare celor care au studiat învățăturile din vechime, unii atribuie această teoremă lui Pitagora, spunând că el o descoperise și jertfise un bou pentru a sărbători această descoperire." Triplete pitagoreice pot fi însă găsite pe tableta cuneiformă babiloniană cunoscută ca Plimton 322, care datează din vremea dinastiei lui Hammurabi (cca 1900–1600 î. Cr.). Mai mult, construcții geometrice bazate pe teorema lui Pitagora au fost găsite

în India, în legătură cu construirea altarelor. Aceste construcții erau fără îndoială cunoscute celui care a scris *Shatapatha Brahmana* (comentariu la textele vedice), pesemne cu cel puțin câteva secole înainte de Pitagora. Dar, indiferent dacă Pitagora a fost sau nu descoperitorul teoremei, e limpede că legăturile repetate găsite între numere, forme și univers i-au dus pe pitagoricieni cu un pas mai aproape de o metafizică bine articulată a ordinii.

Altă idee care a jucat un rol esențial în lumea pitagoreică a fost cea a *contrariilor cosmice*. Cum modelul contrariilor era principiul fundamental în tradiția științifică ioniană, era firesc ca pitagoricienii obsedați de ordine să-l adopte. De fapt, Aristotel ne spune că până și un medic pe nume Alcmaion, care trăia la Crotona pe vremea când Pitagora își avea acolo faimoasa școală, era de acord cu ideea că toate lucrurile își găsesc echilibrul în perechi. Principala pereche de contrarii e alcătuită din *limită*, reprezentată de numerele impare, și *nemărginire*, reprezentată de cele pare. Limita era forța care introduce ordine și armonie în sălbatica, neînfrânata nelimitare. Se credea că atât complexitatea universului, la scară mare,

Figura 5

cât și tribulațiile vieții umane, la nivel microcosmic, constau din și erau controlate de o serie de contrarii care veneau în perechi. Această perspectivă mai curând maniheistă asupra lumii a fost sintetizată într-un „tabel al contrariilor“ în *Metafizica* lui Aristotel:

Limită	Nemărginire
Impar	Par
Unu	Multiplu
Dreapta	Stânga
Masculin	Feminin
Repaus	Mișcare
Drept	Curb
Lumină	Întuneric
Bun	Rău
Pătrat	Alungit

Filozofia elementară exprimată de tabelul contrariilor nu se întâlnea doar în Grecia antică. Noțiunile chineze *yin* și *yang*, *yin* reprezentând negativul și întunericul, iar *yang* principiul luminos, dau aceeași imagine. Ceva asemănător se întâlnește și în noțiunile creștine de rai și iad (ba chiar și în declarațiile prezidențiale americane de tipul „Fie sunteți cu noi, fie sunteți cu teroriștii“). Mai general, sensul vieții a fost întotdeauna lămurit de moarte, iar cel al cunoașterii de comparația cu ignoranța.

Nu toate învățăturile pitagoreice erau legate direct de numere. Viața în cadrul compactului grup pitagoreic era dominată și de vegetarianism, o puternică credință în metempsihoză – nemurirea și transmigrația sufletelor – și o oarecum misterioasă interdicție de a mânca fasole. Mai multe explicații au fost date pentru această interdicție: de la asemănarea fasolei cu organele genitale la comparația între mâncatul fasolei și mâncatul unui suflet viu. Ultima explicație privea vânturile care adesea urmează după ce mănânci fasole – dovadă a unei suflări care se stinge. *Philosophy for Dummies* (*Filozofia pentru tonți*) rezumă astfel doctrina pitagoreică: „Totul e făcut din numere, și nu mâncați fasole, pentru că o să tragă un număr…“

Cea mai veche relatare care ne-a rămas despre Pitagora se leagă de credința în reîncarnarea sufletului în alte ființe. Această poveste aproape poetică ne parvine de la un poet din secolul VI î. Cr., Xenofan din Colofon: „Odată, în preajma cuiva care bătea un cățel, zice-se că [Pitagora] s-ar fi înduioșat și ar fi spus: «Oprește-te, nu-l mai bate! Căci e sufletul unui prieten, pe care l-am recunoscut auzindu-i glasul…»“

Amprente inconfundabile ale lui Pitagora pot fi găsite nu numai în învățăturile filozofilor greci care i-au urmat imediat, ci pe tot drumul până la programele universităților medievale. Cele șapte materii predate în aceste universități se împărțeau în *trivium*, cuprinzând dialectica, gramatica și retorica, și *quadrivium*, cuprinzând temele preferate ale lui Pitagora – geometria, aritmetica, astronomia și muzica. Celesta „armonie a sferelor“ – muzica despre care se presupune că e cântată de planete pe orbitele lor și pe care, potrivit discipolilor, numai Pitagora o putea auzi – a inspirat deopotrivă poeți și savanți. Faimosul astronom Johannes Kepler (1571–1630), cel care a descoperit legile mișcării planetelor, a ales titlul *Harmonice mundi* (*Armonia lumii*) pentru una dintre cele mai importante lucrări ale sale. În spirit pitagoreic, Kepler a elaborat chiar mici „teme“ muzicale pentru diferite planete (la fel cum a făcut compozitorul Gustav Holst trei secole mai târziu).

Din perspectiva problemelor care ne interesează aici, odată ce despuiem filozofia pitagoreică de veșmintele mistice, scheletul care rămâne este totuși o afirmație tranșantă privind matematica, natura ei și relația acesteia atât cu lumea fizică, cât și cu mintea omenească. Pitagora și pitagoricienii sunt părinții căutării ordinii cosmice. Ei pot fi considerați întemeietorii matematicii pure, căci, spre deosebire de predecesorii lor – babilonienii și egiptenii –, au tratat matematica drept o disciplină abstractă, ruptă de orice scopuri practice. Întrebarea dacă pitagoricienii au întemeiat matematica în chip de instrument pentru știință e una delicată. Deși pitagoricienii au asociat toate fenomenele cu numere, numerele însele – nu fenomenele sau cauzele lor – s-au aflat în centrul atenției. Aceasta nu era o cale prea rodnică pe care s-o urmeze cercetarea științifică,

dar doctrina pitagoreică presupunea implicit credința în existența unor legi generale ale naturii. Această credință, care a devenit pilonul central al științei moderne, poate să-și fi avut rădăcinile în ideea de Destin din tragedia greacă. Până la Renaștere, această încredere în realitatea unui corp de legi ce pot explica toate fenomenele era mult mai înaintată decât toate dovezile concrete, iar abia Galilei, Descartes și Newton au transformat-o într-o afirmație ce putea fi susținută pe temeiuri inductive.

Altă contribuție importantă atribuită pitagoricienilor a fost descoperirea tulburătoare că „religia“ lor numerică era, de fapt, inaplicabilă. Numerele întregi 1, 2, 3… nu sunt de-ajuns nici măcar pentru construcția matematicii, ca să nu mai vorbim de descrierea universului. Examinați pătratul din figura 6, în care lungimea unei laturi este de o unitate și în care notăm cu *d* lungimea diagonalei. Putem găsi cu ușurință lungimea diagonalei, folosind teorema lui Pitagora în oricare dintre cele două triunghiuri în care e împărțit pătratul. Potrivit teoremei, pătratul diagonalei (ipotenuza) este egal cu suma pătratelor celor două laturi mai scurte: $d^2 = 1^2 + 1^2$, sau $d^2 = 2$. Odată ce cunoaștem pătratul unui număr pozitiv, găsim numărul extrăgând rădăcina sa pătrată (de exemplu, dacă $x^2 = 9$, atunci valoarea pozitivă a lui $x = \sqrt{9} = 3$). Prin urmare, $d^2 = 2$ implică $d = \sqrt{2}$ unități. Deci raportul dintre lungimea diagonalei și lungimea laturii pătratului este numărul $\sqrt{2}$. Aceasta a constituit adevăratul șoc – o descoperire care a dărâmat meticulos elaborata filozofie pitagoreică a numerelor discrete. Unul dintre pitagoricieni

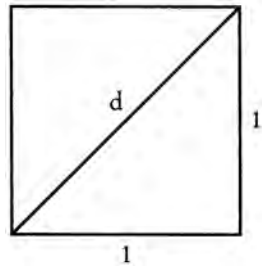


Figura 6

(pesemne Hippasos din Metapont, care a trăit în prima parte a secolului V î. Cr.) a reușit să demonstreze că rădăcina pătrată a lui doi nu poate fi exprimată ca raportul dintre două numere întregi. Cu alte cuvinte, deși avem o infinitate de numere întregi din care putem alege, căutarea a două dintre ele care să dea un raport de √2 este de la început sortită eșecului. Numerele care pot fi exprimate ca rapoarte de numere întregi (de exemplu 3/17; 2/5; 1/10; 6/1) se numesc *numere raționale*. Pitagoricienii au demonstrat că √2 nu este un număr rațional. De fapt, curând după descoperirea inițială, s-a înțeles că nu erau numere raționale nici √3, √17 sau rădăcina pătrată a oricărui număr care nu e pătrat perfect (ca 16 sau 25). Consecințele erau teribile: pitagoricienii au arătat că suntem obligați să adăugăm infinității numerelor raționale o infinitate de noi tipuri de numere – cele pe care le numim astăzi *numere iraționale*. Importanța acestei descoperiri pentru dezvoltarea ulterioară a analizei matematice e imensă. Între altele, a condus la recunoașterea existenței infinităților „numărabili“ și „nenumărabili“, în secolul XIX. Pitagoricienii au fost însă atât de șocați de această criză filozofică, încât Iamblichos spune că cel care a descoperit numerele iraționale și le-a dezvăluit natura „celor nedemni de a se împărtăși din asemenea cunoștințe“ și-a atras „un resentiment atât de mare, încât nu a fost numai exclus din comunitate [a pitagoricienilor] și de la mesele obștei, dar i-a fost chiar durat un mormânt, ca și cum cel care fusese odată un tovarăș al celorlalți discipoli ar fi încetat cu adevărat să mai trăiască“.

Poate chiar mai important decât descoperirea numerelor iraționale a fost accentul pus de Pitagora pe demonstrația matematică – un procedeu bazat în întregime pe raționamentul logic, prin care, pornind de la câteva postulate, se putea stabili fără ambiguitate valabilitatea oricărei propoziții matematice. Înaintea grecilor, nici măcar matematicienii nu se așteptau ca cineva să fie interesat de strădaniile intelectuale care îi conduseseră la o anume descoperire. Dacă o rețetă matematică era aplicabilă în practică – la parcelarea unui teren, de pildă –, acest lucru era o dovadă suficientă. Grecii însă voiau să explice de ce funcționa. Deși ideea de demonstrație

pare să fi fost introdusă de filozoful Thales din Milet (cca 625–547 î. Cr.), pitagoricienii au fost cei care au transformat această practică într-un instrument impecabil pentru stabilirea adevărurilor matematice. În logică, importanța acestei descoperiri a fost imensă. Demonstrații întemeiate pe postulate au așezat imediat matematica pe o bază mult mai solidă decât orice altă disciplină analizată de filozofii acelor timpuri. Odată prezentată o demonstrație riguroasă, întemeiată pe pași de raționament care nu lăsau lacune, corectitudinea afirmației matematice era inatacabilă. Până și Arthur Conan Doyle, creatorul celui mai celebru detectiv din lume, recunoștea statutul aparte al demonstrației matematice. În romanul *Un studiu în roșu*, Sherlock Holmes își consideră concluziile „la fel de sigure ca oricare dintre propozițiile lui Euclid".

În privința întrebării dacă matematica a fost descoperită sau inventată, Pitagora și pitagoricienii nu aveau nici o îndoială – matematica era reală, imuabilă, omniprezentă și mai minunată decât orice s-ar putea ivi din plăpânda minte omenească. Pitagoricienii încorporau literalmente universul în matematică. De fapt, pentru pitagoricieni, nu Dumnezeu era matematician, ci *matematica era Dumnezeu*!

Importanța filozofiei pitagoreice nu rezidă doar în valoarea ei intrinsecă. Fixând cadrul și, într-o anumită măsură, scopurile pentru următoarea generație de filozofi – în particular, Platon –, pitagoricienii au pus bazele liniei directoare dominante în gândirea europeană.

În peștera lui Platon

Celebrul filozof și matematician britanic Alfred North Whitehead (1861–1947) spunea odată că „întreaga istorie a filozofiei occidentale nu e decât o serie de note de subsol la Platon".

Într-adevăr, Platon (cca 428–347 î. Cr.) a fost primul care a reunit teme întinzându-se de la matematică, știință și limbaj la religie, etică și artă, tratându-le într-un mod unitar, care în fond a definit filozofia ca disciplină. Pentru Platon, filozofia nu era o temă

abstractă ruptă de activitatea de zi cu zi, ci un îndrumar care să le spună oamenilor cum să-și trăiască viața, să recunoască adevărurile și să-și călăuzească politica. În particular, el susținea că prin filozofie putem ajunge la tărâmul adevărurilor aflat mult dincolo de ceea ce fie percepem cu simțurile, fie deducem prin simpla judecată comună. Cine a fost acest neobosit căutător al cunoașterii pure, al binelui absolut și al adevărurilor eterne?

Platon, fiul lui Ariston și Perictione, s-a născut la Atena sau Egina. Figura 7 prezintă un bust al lui Platon, cel mai probabil copiat după un original grec mai vechi, din secolul IV î. Cr. Ambele ramuri ale familiei sale aveau o ascendență ilustră, incluzând figuri ca Solon, celebrul legiuitor, și Codros, ultimul rege al Atenei. Unchiul lui Platon, Charmides, și vărul mamei sale, Critias, erau vechi prieteni ai celebrului filozof Socrate (cca 470–399 î. Cr.) – o relație definitorie pentru influența formativă la care a fost expus spiritul tânărului Platon. La început, Platon a vrut să intre în politică, dar o serie de acțiuni violente ale facțiunii care îl curta pe atunci l-au convins să renunțe. Reacția inițială față de politică pare să-l fi încurajat mai târziu pe Platon să scrie despre formarea viitorilor păzitori ai statului. A încercat chiar (fără succes) să-l îndrume pe Dionysos al II-lea, conducătorul Siracuzei.

După execuția lui Socrate din 399 î. Cr., Platon a început un lung periplu care s-a încheiat abia când și-a întemeiat renumita școală de filozofie și știință – Academia – pe la 387 î. Cr. Platon a condus Academia până la moarte, iar nepotul său Speusippos i-a succedat. Spre deosebire de instituțiile academice de azi, Academia era o adunare neprotocolară de intelectuali care, sub îndrumarea lui Platon, aveau o gamă largă de preocupări. Nu existau taxe școlare, nici o programă prestabilită și nici măcar membri permanenți. Exista totuși o „condiție pentru admitere“ puțin obișnuită. Potrivit unui discurs al împăratului Iulian Apostatul (secolul IV d. Cr.), o inscripție împovărătoare atârna deasupra intrării în Academia lui Platon. Deși textul inscripției nu apare în discurs, el poate fi găsit într-o însemnare din secolul IV. Inscripția sună astfel: „Nimeni să nu intre aici, dacă nu a studiat geometria.“ Cum

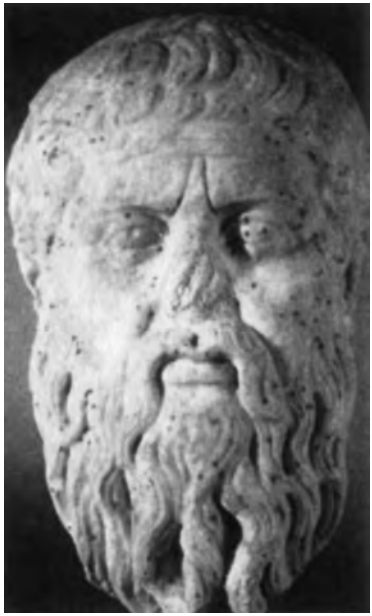


Figura 7

nu mai puțin de opt secole separă întemeierea Academiei de prima mențiune a inscripției, nu putem fi absolut siguri că o asemenea inscripție a existat într-adevăr. Nu încape însă îndoială că această cerință exigentă reflecta opinia lui Platon. Într-unul dintre faimoasele sale dialoguri, *Gorgias*, Platon spune: „Egalitatea geometrică este atotputernică între zei și oameni.“*

„Elevii“ Academiei se întrețineau, în general, singuri, iar unii dintre ei – marele Aristotel, de pildă – au rămas acolo și douăzeci de ani. Platon considera că acest contact pe termen lung al minților creatoare este cel mai bun mijloc pentru apariția unor noi idei, pe teme întinzându-se de la metafizica abstractă și matematică la etică și politică. Puritatea și atributele aproape divine ale discipolilor lui Platon au fost surprinse într-un tablou intitulat

* Platon, *Opere I*, Editura Humanitas, București, 2001. (*N. red.*)

Școala lui Platon al pictorului simbolist belgian Jean Delville (1867–1953). Pentru a sublinia înzestrările spirituale ale elevilor, Delville i-a pictat goi, iar ei par a fi androgini, fiindcă aceasta se presupunea că era starea oamenilor primordiali.

Am fost dezamăgit să aflu că arheologii n-au fost în stare să găsească rămășițele Academiei lui Platon. Într-o călătorie în Grecia în vara lui 2007, am căutat un alt lucru care mi se pare important. Platon menționează Porticul lui Zeus (o alee acoperită, construită în secolul V î. Cr.) ca loc favorit de conversație cu prietenii. Am găsit ruinele acestui portic în partea de nord-vest a vechii agore din Atena (centrul civic de pe vremea lui Platon; figura 8). Trebuie să spun că, deși temperatura urcase la 45°C în acea zi, am simțit un frison când am pășit pe același drum pe care marele om trebuie să-l fi străbătut de sute, dacă nu de mii de ori.

Legendara inscripție deasupra intrării în Academie vorbește limpede despre atitudinea lui Platon în privința matematicii. De fapt, cea mai mare parte a cercetării matematice semnificative din secolul al IV î. Cr. a fost efectuată de personalități legate, într-un fel sau altul, de Academie. Platon însă nu era un matematician

Figura 8

foarte înzestrat, iar contribuțiile sale directe la cunoașterea matematică au fost probabil minime. A fost mai curând un spectator entuziast, o sursă de motivație, un critic inteligent și o călăuză inspiratoare. Philodemos, filozof și istoric din secolul I, ne dă o imagine limpede: „În acele zile matematica a făcut mari progrese, Platon fiind arhitectul general care punea problemele, iar matematicienii le studiau cu toată râvna.“ Filozoful și matematicianul neoplatonician Proclos adaugă: „Platon […] a înaintat mult în matematică în general, și mai cu seamă în geometrie, grație zelului său pentru aceste studii. E îndeobște cunoscut faptul că scrierile sale sunt presărate din belșug cu termeni matematici și că pretutindeni încearcă să stârnească admirația pentru matematică printre cei ce studiază filozofia.“ Cu alte cuvinte, Platon, ale cărui cunoștințe de matematică erau în genere la zi, putea discuta cu matematicienii de la egal la egal și putea să le ofere spre rezolvare probleme, deși realizările sale în matematică nu erau strălucite.

Altă dovadă frapantă pentru interesul lui Platon față de matematică apare în *Republica*, probabil opera sa cea mai împlinită, un amestec năucitor de estetică, etică, metafizică și politică. Acolo, în cartea a VII-a, Platon (prin figura centrală a lui Socrate) schițează un plan ambițios de educație conceput pentru a crea conducători de state utopice. Acest program riguros, dar idealizat, prevedea o pregătire încă din copilărie, împărțită între joc, gimnastică și călătorii. După selectarea celor promițători, programul continua cu nu mai puțin de zece ani de matematică, cinci ani de dialectică și cincisprezece ani de experiență practică ce presupunea comanda militară în vreme de război și alte funcții „potrivite pentru tineri“. Platon arată de ce crede că aceasta e pregătirea necesară pentru viitorii politicieni:

> Așadar este necesar ca spre cârmuire să nu se îndrepte cei ce o îndrăgesc. Căci altminteri cârmuitorii devin rivali în iubire și se luptă unii cu alții. […] Pe care alții, deci, îi vei determina să se îndrepte spre paza cetății, decât pe cei care, mai întâi, sunt cei mai buni cunoscători ai condițiilor ce fac ca o cetate să fie cel mai bine alcătuită, dar care, în plus,

> mai au și alte cinstiri [decât cele politice], ca și o viață mai bună decât cea politică?*

Îmbucurător, nu-i așa? De fapt, deși un asemenea program era probabil imposibil de pus în practică chiar și pe vremea lui Platon, George Washington era de acord că educația în matematică și filozofie nu era o idee rea pentru viitorii politicieni:

> Știința figurilor nu e doar o cerință indispensabilă în orice întreprindere a unei vieți civilizate, dar cercetarea adevărurilor matematice obișnuiește mintea cu metoda și corectitudinea în gândire, și este o îndeletnicire demnă de o ființă rațională. Într-o stare de confuzie, în care precaritatea atâtor lucruri ne descumpănește, pe ea se pot întemeia facultățile raționale. Pornind de pe terenul ferm al demonstrației matematice și filozofice, suntem conduși pe nesimțite către speculații mai nobile și meditații mai înalte.

În problema naturii matematicii, mai important decât Platon matematicianul sau susținătorul matematicii a fost Platon filozoful matematicii. Ideile sale nu numai că l-au înălțat deasupra tuturor matematicienilor și filozofilor vremii, dar au făcut din el o figură călăuzitoare pentru următoarele milenii.

Perspectiva lui Platon asupra e ceea ce este cu adevărat matematica își trage obârșia din celebra alegorie a peșterii. Acolo, Platon subliniază valabilitatea îndoielnică a informației furnizate de simțurile umane. Ceea ce percepem ca lume reală, spune Platon, nu e mai real decât umbrele proiectate pe pereții unei peșteri. Acesta e remarcabilul pasaj din *Republica*:

> [I]ată mai mulți oameni aflați într-o încăpere subpământeană, ca într-o peșteră, al cărei drum de intrare dă spre lumină, drum lung față de [lungimea] întregului peșterii. În această încăpere ei se găsesc, încă din copilărie, cu picioarele

---

* Citatele din *Republica* sunt din Platon, *Opere V*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986. (*N. t.*)

> și grumazurile legate, astfel încât trebuie să stea locului și să privească doar înainte, fără să poată să-și rotească capetele din pricina legăturilor. Lumina vine de sus și de departe, de la un foc aprins înapoia lor; iar între foc și oamenii legați este un drum așezat mai sus, de-a lungul căruia, iată, e zidit un mic perete, așa cum este paravanul scamatorilor, pus dinaintea celor ce privesc, deasupra căruia își arată ei scamatoriile… […] [M]ai încearcă să vezi și că, de-a lungul acestui perete, niște oameni poartă felurite obiecte care depășesc în înălțime zidul, mai poartă și statui de oameni, ca și alte făpturi de piatră sau lemn, lucrate în chipul cel mai divers. […] Căci crezi că astfel de oameni au văzut, mai întâi, din ei înșiși, cât și din soții lor, altceva decât umbrele care cad, aruncate de foc, pe zidul de dinaintea lor?

Potrivit lui Platon, noi, oamenii, nu ne deosebim de acei prizonieri din peșteră care iau umbrele drept realitate. (Figura 9 înfățișează o gravură din 1604 a lui Jan Saenredam, ilustrând alegoria.) În particular, subliniază Platon, adevărurile matematice nu se referă la cercuri, triunghiuri și pătrate care pot fi desenate pe un papirus sau trasate cu bățul pe nisip, ci la obiecte abstracte ce aparțin unei lumi ideale care e sălașul adevăratelor forme și desăvârșiri. Această lume platoniciană a formelor matematice e diferită de lumea fizică, iar ea este lumea în care sunt adevărate propozițiile matematice de genul teoremei lui Pitagora. Triunghiul dreptunghic pe care-l desenăm pe hârtie nu e decât o copie imperfectă – o aproximație – a triunghiului adevărat, abstract.

Altă problemă fundamentală studiată de Platon se referă la natura demonstrației matematice ca proces bazat pe *postulate* și *axiome*. Axiomele sunt afirmații elementare a căror valabilitate se presupune a fi de la sine înțeleasă. De pildă, prima axiomă a geometriei euclidiene este: „Între oricare două puncte se poate trage o linie dreaptă.“ În *Republica*, Platon combină admirabil conceptul de postulat cu ideea sa privind lumea formelor matematice:

Figura 9

> Cred că tu știi că geometrii, aritmeticienii și cei ce se îndeletnicesc cu astfel de lucruri, după ce postulează imparul și parul, formele și cele trei feluri de unghiuri, cât și celelalte înrudite cu acestea, potrivit cu fiecare dintre metode, le consideră pe acestea postulate, presupunându-le cunoscute, și nu cred de cuviință să le explice nici lor înșile, nici celorlalți, socotindu-le cu totul evidente. Pornind de la acestea, parcurg tot restul și sfârșesc prin a cădea de acord asupra chestiunii pe care intenționează s-o cerceteze. […] Atunci știi și că ei se folosesc de figuri vizibile și că discută despre ele, fără însă a raționa asupra lor, ci [în fapt] asupra acelor entități cu care figurile doar seamănă; în vederea pătratului însuși și a diagonalei lui discută, și nu în vederea figurii pe care o desenează […] căutând să vadă acele realități ele însele, care *nu ar putea fi altfel văzute decât prin intermediul rațiunii* [s. m.].

Perspectiva lui Platon a stat la baza a ceea ce în filozofie în genere și în dezbaterile privind natura matematicii în particular s-a numit

platonism. Platonismul, în sensul său cel mai larg, presupune existența unor realități eterne și imuabile, complet independente de lumea perisabilă percepută de simțurile noastre. Potrivit platonismului, existența reală a obiectelor matematice este un fapt obiectiv în aceeași măsură ca și existența universului însuși. Nu doar numerele naturale, cercurile și pătratele există, ci și numerele imaginare, funcțiile, fractalii, geometriile neeuclidiene și șirurile infinite, precum și o mulțime de teoreme legate de acestea. Pe scurt, orice noțiune matematică sau afirmație „obiectiv adevărată“ (vom da definiția mai târziu), formulată sau imaginată vreodată, și o infinitate de noțiuni și afirmații încă nedescoperite sunt entități absolute, sau *universale*, care nu pot fi nici create, nici distruse. Ele există independent de cunoașterea noastră asupra lor. Evident, aceste obiecte nu sunt obiecte fizice – ele sălășluiesc într-o lume autonomă a esențelor atemporale. Platonismul îi considera pe matematicieni exploratorii unor ținuturi străine; ei pot doar descoperi, nu și inventa, adevărurile matematice. Așa cum America se afla la locul ei cu mult înainte de a fi descoperită de Columb (sau de Leif Ericson), teoremele matematice existau în lumea platoniciană înainte ca babilonienii să fi început să studieze matematica. Pentru Platon, singurele lucruri care există cu adevărat și pe deplin sunt acele forme și idei abstracte ale matematicii, din moment ce numai în matematică, susține el, putem dobândi o cunoaștere absolut sigură și obiectivă. Prin urmare, în mintea lui Platon, matematica se apropie mult de divin. În dialogul *Timaios*, zeul-creator folosește matematica pentru a modela lumea, iar în *Republica* cunoașterea matematicii e considerată pasul esențial pe calea cunoașterii formelor divine. Platon nu folosește matematica pentru formularea unor legi ale naturii testabile prin experimente. Pentru el, caracterul matematic al lumii e o simplă consecință a faptului că „Dumnezeu face întotdeauna geometrie“.

Platon își extinde și spre alte discipline, în particular spre astronomie, ideile privind „formele adevărate“. El susține că în adevărata astronomie „trebuie să lăsăm cerul în pace“ și să nu încercăm să dăm seamă de aranjarea și mișcările aparente ale

stelelor vizibile. Platon privea în schimb adevărata astronomie ca pe o știință ce se ocupă de legile de mișcare într-o lume ideală, matematică, pentru care cerul observabil nu e decât o ilustrare (la fel cum figurile geometrice desenate pe papirus ilustrează doar figurile adevărate).

Propunerile lui Platon privind cercetările astronomice sunt îndoielnice chiar și pentru unii dintre cei mai devotați platonicieni. Apărătorii ideilor sale susțin că de fapt Platon nu vrea să spună că astronomia trebuie să se ocupe de un cer ideal care n-are nici o legătură cu cel observabil, ci că trebuie să se ocupe de mișcările reale ale corpurilor cerești, iar nu de mișcările aparente, așa cum se văd ele de pe Pământ. Alții subliniază totuși că adoptarea *ad litteram* a spuselor lui Platon a împiedicat serios dezvoltarea astronomiei observaționale ca știință. Indiferent de interpretarea atitudinii lui Platon față de astronomie, platonismul a devenit dogma centrală în privința bazelor matematicii.

Există însă cu adevărat lumea platoniciană a matematicii? Și dacă există, unde se află? Și ce sunt afirmațiile „obiectiv adevărate" care populează această lume? Oare matematicienii care aderă la platonism exprimă pur și simplu același gen de credință romantică atribuită marelui artist renascentist Michelangelo? Potrivit legendei, Michelangelo credea că minunatele sale sculpturi existau deja înăuntrul blocurilor de marmură și că rolul lui era doar de a le scoate la iveală.

Platonicienii de azi (da, există, iar ideile lor vor fi prezentate mai amănunțit în capitolele următoare) insistă asupra faptului că lumea platoniciană a formelor matematice este reală, și aduc exemple concrete, din punctul lor de vedere, de afirmații matematice obiectiv adevărate din acea lume.

Să considerăm următoarea propoziție ușor de înțeles: fiecare întreg par mai mare decât 2 poate fi scris ca suma a două numere prime (numere divizibile numai prin unu și ele însele). Această afirmație care sună simplu este așa-numita conjectură a lui Goldbach, pentru că o conjectură echivalentă apare în scrisoarea matematicianului amator prusac Christian Goldbach (1690–1764) din

7 iunie 1742. Putem uşor verifica validitatea acestei conjecturi pentru primele numere pare: 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7 (sau 5 + 5), 12 = 5 + 7, 14 = 3 + 11 (sau 7 + 7), 16 = 5 + 11 (sau 3 + 13) etc. Această afirmaţie e atât de simplă, încât matematicianul englez G.H. Hardy a declarat că „orice prost putea s-o ghicească". De fapt, marele matematician şi filozof René Descartes anticipase această conjectură înaintea lui Goldbach. În schimb, demonstrarea acestei conjecturi s-a dovedit a fi cu totul altă poveste. În 1996, matematicianul chinez Chen Jingrun a făcut un mare pas înainte pe calea demonstraţiei. El a reuşit să arate că orice întreg par suficient de mare este suma a două numere dintre care unul este prim, iar al doilea are cel mult doi factori primi. Înainte de sfârşitul lui 2005, cercetătorul portughez Tomás Oliveira e Silva demonstrase adevărul conjecturii pentru numere până la 3×10^{17} (trei sute de mii de trilioane). Cu toate acestea, în pofida eforturilor imense depuse de mulţi matematicieni de talent, demonstraţia generală ne scapă deocamdată. Nici măcar tentaţia suplimentară a premiului de 1 milion de dolari oferit între 20 martie 2000 şi 20 martie 2002 (pentru a face publicitate romanului intitulat *Unchiul Petros şi conjectura lui Goldbach**) n-a produs rezultatul dorit. Aici intervine însă problema delicată a sensului „adevărului obiectiv" în matematică. Să presupunem că o demonstraţie riguroasă va fi formulată în 2016. Vom putea atunci spune că afirmaţia era deja adevărată atunci când Descartes s-a gândit la ea prima dată? Majoritatea oamenilor vor fi acord că întrebarea e prostească. Evident, dacă propoziţia se dovedeşte a fi adevărată, atunci a fost *întotdeauna* adevărată, chiar şi înainte să ştim că e adevărată. Sau, să luăm alt exemplu aparent nevinovat, aşa-numita *conjectură a lui Catalan*. Numerele 8 şi 9 sunt numere întregi consecutive, iar fiecare este egal cu puterea întreagă a unui număr întreg, adică $8 = 2^3$ şi $9 = 3^2$. În 1844, matematicianul belgian Eugène Charles Catalan (1814–1894) a făcut următoarea conjectură:

* Romanul a apărut în româneşte la Editura Humanitas, în colecţia „Cartea de pe noptieră". (*N. t.*)

între toate puterile posibile ale numerelor întregi, singura pereche de numere consecutive (cu excepția lui 0 și 1) este 8 și 9. Cu alte cuvinte, ne putem petrece viața așternând pe hârtie toate puterile întregi ale numerelor întregi, iar în afară de 8 și 9 nu vom găsi alte două numere care să difere numai prin 1. În 1342, matematicianul și filozoful evreu francez Levi Ben Gerson (1288–1344) a demonstrat o mică parte a conjecturii – anume că 8 și 9 sunt singurele puteri ale lui 2 și 3 care diferă prin 1. Un mare pas înainte a fost făcut de matematicianul Robert Tijdeman în 1976. Demonstrarea formei generale a conjecturii lui Catalan i-a chinuit pe cei mai mari matematicieni timp de peste 150 de ani. În sfârșit, matematicianul român Preda Mihăilescu a prezentat o demonstrație completă a conjecturii pe 18 aprilie 2002. Demonstrația sa a fost publicată în 2004 și este acum deplin acceptată. Din nou ne putem întreba: când a devenit adevărată conjectura lui Catalan? În 1342? În 1844? În 1976? În 2002? În 2004? Nu este evident că afirmația a fost întotdeauna adevărată, doar că noi n-am știut că era adevărată? Acestea sunt tipurile de adevăruri platoniciene pe care le numim „adevăruri obiective“.

Unii matematicieni, filozofi, specialiști în științele cognitive și alți „consumatori“ de matematică (de pildă, informaticienii) consideră că lumea platoniciană ține de imaginația unor minți prea visătoare (voi prezenta în detaliu această perspectivă ceva mai târziu). În 1940, faimosul istoric al matematicii Eric Temple Bell (1883–1960) a făcut următoarea predicție:

> Potrivit profeților, ultimul adept al idealului platonic în matematică se va fi alăturat dinozaurilor înainte de anul 2000. Despuiată de veșmintele mitice ale caracterului etern, matematica va fi atunci recunoscută drept ceea ce a fost dintotdeauna, un limbaj construit omenește, născocit de oameni în scopuri precise, stabilite de ei înșiși. Ultimul templu al unui adevăr absolut se va fi evaporat odată cu nimicul pe care-l păstra cu sfințenie.

Profeția lui Bell s-a dovedit greșită. Deși au apărut dogme diametral opuse platonismului, ele nu au cucerit pe deplin mințile (și inimile) tuturor matematicienilor și filozofilor, care rămân și astăzi la fel de divizați ca întotdeauna.

Să presupunem totuși că ar fi învins platonismul și că am fi devenit cu toții platonicieni cu trup și suflet. Explică oare platonismul „imprevizibila eficacitate" a matematicii în descrierea lumii înconjurătoare? Nu tocmai. De ce ar trebui ca realitatea fizică să se comporte potrivit unor legi din lumea platoniciană abstractă? Acesta e unul dintre misterele evocate de Penrose, iar Penrose este el însuși un platonician convins. Așa încât, deocamdată, chiar de-ar fi să îmbrățișăm platonismul, trebuie să acceptăm că misterul forței matematicii rămâne nelămurit. După cum spunea Wigner, „Este greu de evitat impresia că suntem confruntați aici cu un miracol frapant, comparabil cu miracolul care face ca mintea umană să lege laolaltă o mie de raționamente fără a ajunge la contradicții".

Pentru a înțelege pe deplin amploarea acestui miracol, trebuie să cercetăm viețile și contribuțiile celor care au înfăptuit miracolul – mințile aflate în spatele descoperirii câtorva dintre aceste incredibil de precise legi ale naturii.

Capitolul 3

Magicienii: Maestrul și ereticul

Spre deosebire de Cele Zece Porunci, știința nu a fost înmânată omenirii pe impresionante tăblițe de piatră. Istoria științei e istoria măririi și decăderii a numeroase speculații, ipoteze și modele. Multe idei aparent ingenioase s-au dovedit a fi false începuturi sau au sfârșit în impas. Unele teorii considerate bătute în cuie au fost mai târziu infirmate de testul dur al experimentelor și observațiilor, pentru a deveni complet depășite. Nici măcar extraordinara capacitate intelectuală a creatorilor unor sisteme de gândire nu le-a făcut pe acestea imune la înlocuire. Marele Aristotel, de pildă, credea că pietrele, merele și alte obiecte grele cad pentru că își caută locul firesc, care e centrul Pământului. Pe măsură ce se apropie de sol, susținea Aristotel, aceste corpuri își sporesc viteza pentru că sunt fericite să se întoarcă acasă. Pe de altă parte, aerul (și focul) se deplasează în sus pentru că locul firesc al aerului se află între sferele cerești. Tuturor obiectelor li se poate atribui o natură, pe baza relațiilor cu constituenții elementari – pământ, foc, aer și apă. După cum spunea Aristotel,

> Printre ființe, unele există prin natură, altele există prin alte cauze; prin natură există […] corpurile simple, cum sunt pământul, focul, aerul și apa […]. Toate aceste lucruri menționate se vede că se deosebesc de cele care nu există prin natură. Astfel, lucrurile care există prin natură, toate, se vede că au în ele însele un principiu de mișcare și repaus […] natura este cauza și principiul mișcării și repausului pentru

> lucrul în care se află mai întâi în sine, şi nu prin accident. […] Iar lucrurile conforme naturii sunt şi aceste substanţe, şi atributele lor, de exemplu, cum este pentru foc transportul în sus.*

Aristotel a încercat chiar să formuleze o lege cantitativă a mişcării. A afirmat că obiectele mai grele cad mai repede, viteza fiind direct proporţională cu greutatea (se presupunea că un obiect de două ori mai greu decât altul avea să cadă cu o viteză de două ori mai mare). Dacă experienţa de zi cu zi făcea ca această lege să pară rezonabilă – putea fi observat cum o cărămidă atingea solul mai repede decât o pană lăsată să cadă de la aceeaşi înălţime –, Aristotel nu a examinat totuşi niciodată cu mai multă atenţie această afirmaţie cantitativă. Fie nu i-a trecut prin minte, fie nu a considerat necesar să verifice dacă două cărămizi lipite între ele cad de două ori mai repede decât una singură. Galileo Galilei (1564–1642), mult mai orientat spre matematică şi experiment şi dovedind prea puţin respect pentru fericirea cărămizilor şi merelor în cădere, a fost primul care a arătat că Aristotel înţelesese problema complet greşit. Folosind un experiment mintal ingenios, Galilei a demonstrat că legea lui Aristotel n-avea nici un sens, pentru că era inconsecventă din punct de vedere logic. Argumentul era următorul: să presupunem că legăm două obiecte. Cât de repede va cădea obiectul combinat în comparaţie cu fiecare dintre cei doi constituenţi ai săi? Pe de o parte, potrivit legii lui Aristotel, am putea trage concluzia că va cădea cu o viteză intermediară, pentru că obiectul mai uşor îl va frâna pe cel mai greu. Pe de altă parte, dat fiind că obiectul combinat este mai greu decât componentele sale, ar trebui să cadă chiar mai repede decât cel mai greu dintre ele, ceea ce conduce la o contradicţie evidentă. Singurul motiv pentru care o pană cade pe pământ mai lin decât o cărămidă este rezistenţa mai mare din partea aerului resimţită de pană – dacă ambele ar fi lăsate să cadă de la aceeaşi înălţime în vid, ar ajunge simultan la sol. Acest fapt a fost demonstrat de numeroase

---

* Aristotel, *Fizica*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966. (*N. t.*)

experiențe, dintre care cea mai spectaculoasă îi aparține astronautului David Randolph Scott în misiunea Apollo 15. Scott – al șaptelea om care a păşit pe Lună – a lăsat să cadă simultan un ciocan dintr-o mână şi o pană din alta. Cum Luna e aproape lipsită de atmosferă, ciocanul şi pana au atins suprafața lunară în acelaşi timp.

Nu e uimitor că legea de mişcare a lui Aristotel era greşită, ci faptul că a fost acceptată timp de aproape două mii de ani. Cum a putut o idee eronată să se bucure de asemenea longevitate? Este un caz de „furtună perfectă" – trei forțe a căror combinație creează o doctrină inatacabilă. Întâi, faptul simplu că în absența măsurătorilor, legea lui Aristotel părea să fie în acord cu experiența bazată pe bun-simț – foile de papirus pluteau prin aer, în timp ce bucățile de plumb nu. A fost nevoie de geniul lui Galilei pentru a afirma că bunul-simț putea fi înşelător. În al doilea rând, era ponderea colosală a reputației şi autorității lui Aristotel ca savant. În fond, el era cel care pusese bazele unei mari părți a culturii intelectuale occidentale. Fie că era vorba despre cercetarea tuturor fenomenelor naturale sau despre principiile de bază ale eticii, metafizicii, politicii şi artei, Aristotel lămurise problema. Şi asta nu era tot. Într-un fel, Aristotel ne-a învățat chiar *cum* să gândim, scriind primele studii de logică. Astăzi, aproape orice copil de şcoală recunoaşte sistemul practic complet al deducției logice inițiat de Aristotel şi cunoscut ca *silogism*:

1. Toți grecii sunt oameni.
2. Toți oamenii sunt muritori.
3. Prin urmare, toți grecii sunt muritori.

Al treilea motiv al incredibilei longevități a teoriei aristoteliciene incorecte era faptul că biserica creştină o integrase în propria sa dogmă. Această împrejurare a avut un efect descurajant asupra mai tuturor încercărilor de a pune la îndoială afirmațiile lui Aristotel.

În ciuda impresionantelor sale contribuții la sistematizarea logicii deductive, Aristotel nu a fost remarcat pentru contribuțiile sale matematice. Poate părea surprinzător, dar omul care a întemeiat în fond ştiința ca demers organizat nu era prea preocupat (în

nici un caz la fel de mult ca Platon) de matematică și a fost mai curând slab la fizică. Chiar dacă Aristotel a recunoscut importanța relațiilor numerice și geometrice în știință, el a continuat să considere matematica o disciplină abstractă, ruptă de realitatea fizică. Prin urmare, deși nu încape îndoială că a fost o forță intelectuală, Aristotel *nu* se află pe lista mea de „magicieni" ai matematicii.

Folosesc aici termenul „magicieni" pentru aceia care au putut scoate iepuri din pălării cu adevărat goale, pentru aceia care au descoperit legături între matematică și natură, la care nimeni nu se gândise înainte, pentru aceia care au putut observa fenomene naturale complexe din care au distilat legi matematice de limpezimea cristalului. În unele cazuri, acești remarcabili gânditori s-au folosit chiar de experimente și observații în elaborarea matematicii lor. Problema imprevizibilei eficacități a matematicii în explicarea naturii nu s-ar fi ivit niciodată dacă nu ar fi existat acești magicieni – el s-a născut direct din formidabilele descoperiri ale acestor cercetători.

Nici o carte nu face dreptate tuturor oamenilor de știință și matematicienilor care au contribuit la înțelegerea universului. În acest capitol și în următorul, intenționez să vorbesc doar despre patru titani din secolele trecute, al căror statut de magicieni nu poate fi pus la îndoială – o parte din *crème de la crème* a lumii științifice. Ne amintim de primul magician de pe lista mea din pricina unei împrejurări mai curând neobișnuite – umbla gol pe străzile orașului său natal.

Dați-mi un punct de sprijin, și voi urni Pământul din loc

Atunci când istoricul matematicii Eric Temple Bell a trebuit să aleagă numele primilor trei matematicieni, el a spus:

> Orice listă a celor trei „cei mai mari" matematicieni din istorie trebuie să includă numele lui Arhimede. Ceilalți doi

care i se alătură sunt, de obicei, Newton (1642–1727) și Gauss (1777–1855). Unii, considerând relativa bogăție – sau sărăcie – a matematicii și fizicii din epocile când au trăit acești titani, și judecând realizările lor în raport cu ceea ce se știa pe atunci, l-ar pune primul pe Arhimede.

Arhimede (287–212 î. Cr.; figura 10 înfățișează un bust presupus a-l reprezenta pe Arhimede, dar care poate fi al unui rege spartan) a fost într-adevăr echivalentul lui Newton sau Gauss la acea vreme; un om atât de strălucit, cu atâta imaginație și pătrundere, încât deopotrivă contemporanii și generațiile ulterioare i-au proslăvit numele. Deși e mai cunoscut pentru ingenioasele sale invenții inginerești, Arhimede a fost în primul rând matematician, iar matematica lui era cu secole înaintea epocii sale. Din păcate, se știe puțin despre copilăria lui Arhimede și despre familia sa. Prima biografie, scrisă de un anume Heraclid, nu s-a păstrat, iar puținele detalii pe care le cunoaștem despre viața și moartea sa violentă provin în primul rând din scrierile istoricului roman Plutarh. Plutarh (cca 46–120 d. Cr.) era, de fapt, mai interesat de isprăvile militare ale generalului roman Marcellus, care cucerise orașul natal al lui Arhimede, Siracuza, în 212 î. Cr. Din fericire pentru istoria matematicii, Arhimede i-a provocat atâtea dureri de cap lui Marcellus pe durata asediului Siracuzei, încât trei istorici importanți ai acelei perioade, Plutarh, Polybios și Titus Livius, nu l-au putut ignora.

Arhimede s-a născut la Siracuza, pe atunci așezare grecească în Sicilia. Potrivit propriei sale mărturii, era fiul astronomului Phidias, despre care se cunoaște puțin în afara faptului că a estimat raportul dintre diametrul Soarelui și cel al Lunii. Arhimede poate că se înrudea și cu regele Hieron al II-lea, fiul nelegitim al unui nobil (și al uneia dintre sclavele acestuia). Indiferent de legăturile lui Arhimede cu familia regală, atât regele, cât și fiul său, Gelon, i-au arătat întotdeauna multă prețuire. În tinerețe, Arhimede petrece un timp la Alexandria, unde studiază matematica, înainte de a se întoarce la o viața închinată studiului, la Siracuza.

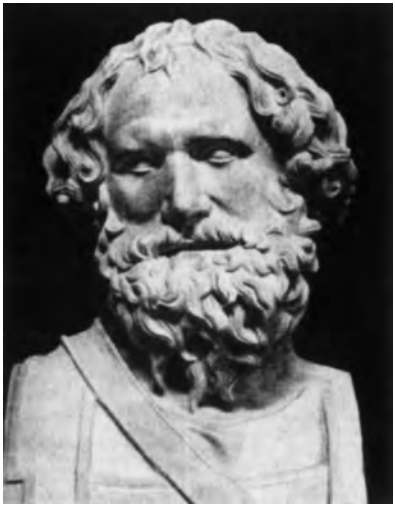


Figura 10

Arhimede era un matematician pur sânge. Potrivit lui Plutarh, „socotind că […] tot meșteșugul care se amesteca cu folosul este lipsit de noblețe și josnic, el și-a pus toată râvna numai în studierea acelor lucruri care nu amestecă frumosul și gloria cu folosul și care sunt de necomparat cu celelalte“.* Interesul lui Arhimede pentru matematica abstractă și gradul în care era mistuit de aceasta păreau să depășească cu mult entuziasmul îndeobște afișat de practicanții acestei discipline. Din nou, potrivit lui Plutarh:

> …parcă fermecat de un fel de sirenă proprie și înnăscută, uita de mâncare și neglija îngrijirea corpului, iar, de multe ori, când era dus cu sila la unsoare și la baie, desena figuri geometrice pe vatră și pe corpul său uns, trăgea drepte cu degetul, fiind stăpânit de o mare plăcere și cu adevărat fermecat de muze.

---

* Pentru acest citat și următoarele, Plutarh, *Vieți paralele II*, Editura Științifică, București, 1963. (*N. red.*)

În ciuda disprețului său pentru matematica aplicată și a desconsiderării ideilor inginerești, ingenioasele sale invenții, iar nu geniul matematic, l-au făcut celebru.

Cea mai cunoscută legendă privitoare la Arhimede îi întărește imaginea-clișeu de matematician cu capul în nori. Această poveste amuzantă a fost relatată pentru prima dată de arhitectul roman Vitruviu în secolul I î. Cr, și ea sună astfel: regele Hieron voia să aducă ofrandă zeilor o coroană de aur. Când i-a fost adusă coroana, ea cântărea cât aurul necesar fabricării sale. Totuși, regele era bănuitor, temându-se că o parte din aur fusese înlocuit cu argint de aceeași greutate. Neputându-și justifica neîncrederea, regele s-a adresat maestrului între matematicieni – Arhimede. Într-o zi, continuă legenda, Arhimede a intrat în baie, încă preocupat de problema dezvăluirii posibilei fraude. Cufundându-se în apă, și-a dat seama că trupul său dislocase un anumit volum de apă care se revărsase peste marginea căzii. Acest lucru a declanșat imediat o soluție în mintea sa. Copleșit de bucurie, Arhimede a sărit din cadă alergând gol în stradă și urlând „*Evrika, Evrika!*“ („Am găsit, am găsit!“).*

Altă exclamație faimoasă a lui Arhimede „Dați-mi un punct de sprijin, și voi urni Pământul din loc!“ figurează în prezent (într-o versiune sau alta) în peste 150 000 de pagini de pe Internet găsite la o căutare pe Google. Această declarație îndrăzneață, care sună aproape ca sloganul unei mari companii, a fost citată de Thomas Jefferson, Mark Twain, John F. Kennedy și apare chiar și într-o poezie a lui Byron. Fraza cu pricina pare să fi marcat apogeul cercetărilor lui Arhimede în problema deplasării unei greutăți date cu ajutorul unei forțe date. Plutarh ne spune că, atunci când regele Hieron a cerut o demonstrație practică a capacității lui Arhimede de a mânui o greutate mare folosind o forță mică, Arhimede a reușit – folosind un sistem de scripeți – să lanseze la apă o

* Astfel, volumul de apă dislocat de coroana de aur pur ar fi fost mai mare decât cel al coroanei contrafăcute, argintul fiind mai puțin dens decât aurul. (*N. t.*)

corabie încărcată. Plutarh adaugă cu admirație „a tras corabia ușor și fără zguduire, ca și când ar fi lunecat pe mare“. Versiuni ușor modificate ale aceleiași legende apar și în alte surse. Deși e greu de crezut că Arhimede a putut deplasa efectiv o întreagă corabie folosind dispozitivele mecanice disponibile la acea vreme, legendele lasă puțină îndoială asupra faptului că a făcut o demonstrație impresionantă cu o invenție prin care putea manevra greutăți mari.

Arhimede a realizat multe alte invenții pe timp de pace, de pildă șurubul hidraulic pentru ridicarea apei și un planetariu care demonstra mișcările corpurilor cerești, dar, în Antichitate, a devenit celebru prin rolul jucat în apărarea Siracuzei împotriva romanilor.

Istoricilor le-au plăcut întotdeauna războaiele, așa încât există numeroase cronici despre asediul Siracuzei din 214–212 î. Cr. Generalul roman Marcus Claudius Marcellus (cca 268–208 î. Cr.), bucurându-se pe-atunci de o mare faimă militară, prevedea o victorie rapidă. Se pare că nu l-a luat în calcul pe încăpățânatul rege Hieron, secondat de un geniu matematic și ingineresc. Plutarh ne dă o descriere vie a prăpădului provocat de mașinăriile lui Arhimede în rândurile romanilor:

> […] Arhimede a deschis mașinile și pe pedeștri îi întâmpinau în același timp tot felul de săgeți și de pietre enorme, zburând cu un vâjâit și cu o iuțeală de necrezut și nimeni nu le putea suporta greutatea, în timp ce ele răsturnau pe cei asupra cărora cădeau și puneau în dezordine liniile de atac. În partea mării, cârlige așezate pe ziduri dădeau la fund unele corăbii izbindu-le de sus, cu greutate; pe altele le apucau de proră cu cângi de fier sau cu ciocuri de fier, asemănătoare cu ale cocorilor, și, sprijinindu-le de pupă, le scufundau. […] De multe ori o corabie era ridicată de la suprafața mării sus și se învârtea, spânzurată în aer, oferind o privelişte înfiorătoare, până când oamenii de pe ea se aruncau jos și erau străpunși de săgeți, iar corabia cădea goală peste ziduri sau alături, când mașinile îi dădeau drumul.

Dispozitivele lui Arhimede provocau o spaimă cumplită: „romanii erau atât de cuprinși de frică, încât, dacă zăreau vreo frânghie sau vreun lemn apărând pe zid, strigau că Arhimede pune în mișcare vreo mașină împotriva lor și se întorceau urlând și fugeau […]“. Până și Marcellus era profund impresionat, plângându-se în fața echipei sale de ingineri militari: „Cum vom duce la capăt lupta împotriva acestui Briareos [uriaș cu o sută de brațe, fiu al lui Uranus și al Gaiei] geometru care, șezând pe țărmul mării și jucându-se, ne-a azvârlit corăbiile […] și care întrece pe hecantonchiri [uriașii cu o sută de brațe] aruncând atâtea arme împotriva noastră?“

Potrivit altei cunoscute legende care apare prima dată în scrierile medicului grec Galen (129–200), Arhimede a folosit un sistem de oglinzi pentru a focaliza razele Soarelui ca să ardă corăbiile romane. Anthemios din Tralles, arhitect bizantin din secolul VI, și câțiva istorici din secolul XII au reluat această povestire fantastică, dar înfăptuirea efectivă a unei asemenea isprăvi rămâne nesigură. Toate aceste povești aproape mitologice ne arată însă câtă venerație a inspirat „cel înțelept“ generațiilor ulterioare.

După cum am observat mai sus, Arhimede însuși – mult-prețuitul „Briareos geometru“ – nu acorda vreo importanță jucăriilor sale militare; le privea de fapt ca pe niște amuzamente geometrice. Din păcate, această atitudine distantă l-a costat în cele din urmă viața. Când romanii au pus în fine stăpânire pe Siracuza, Arhimede era atât de preocupat să deseneze figuri geometrice pe o tăbliță cu nisip, încât n-a remarcat tumultul războiului. Potrivit unor relatări, atunci când un soldat roman i-a ordonat lui Arhimede să-l urmeze la Marcellus, bătrânul geometru a răspuns indignat: „Nu te atinge de cercurile mele!“ Răspunsul l-a înfuriat pe soldat în asemenea hal încât, neascultând de ordinele precise ale comandantului, și-a scos sabia din teacă și l-a răpus pe cel mai mare matematician al Antichității. Figura 11 înfățișează o reproducere (din secolul XVIII) a unui mozaic găsit la Herculanum, înfățișând ultimele clipe ale vieții „maestrului“.

Moartea lui Arhimede a marcat, într-un fel, sfârşitul unei epoci extraordinar de bogate din istoria matematicii. După cum observa matematicianul şi istoricul britanic Alfred North Whitehead,

> Moartea lui Arhimede, ucis de un soldat roman, este simbolică pentru o transformare profundă a lumii. Romanii au fost un mare popor, dar purtau stigmatul sterilității care însoțește spiritul practic. Nu erau destul de visători pentru a ajunge la noi perspective, care i-ar fi ajutat să stăpânească mai bine forțele naturii. Nici un roman nu și-a pierdut viața pentru că era absorbit în contemplarea unor figuri matematice.

Din fericire, dacă detaliile privind viața lui Arhimede sunt puține, multe (dar nu toate) dintre incredibilele sale scrieri au supraviețuit. Arhimede avea obiceiul să trimită note despre descoperirile sale matematice câtorva prieteni matematicieni sau oamenilor pe care îi respecta. Lista corespondenților săi îi include (printre alții) pe

Figura 11

astronomul Conon din Samos, pe matematicianul Eratostene din Cyrene și pe fiul regelui, Gelon. După moartea lui Conon, Arhimede i-a trimis câteva note elevului lui Conon, Dositheos din Pelusium.

Cercetările lui Arhimede acoperă un spectru uimitor din matematică și fizică. Între altele, a găsit metode generale de determinare a ariilor pentru diverse figuri plane și a volumelor mărginite de tot soiul de suprafețe curbe – de exemplu, ariile cercului, ale segmentelor de parabolă și de spirală, volumele segmentelor de cilindru, con, precum și ale altor corpuri generate de rotația parabolei, elipsei și hiperbolei. A arătat că valoarea numărului π, raportul dintre circumferința și diametrul unui cerc, trebuie să fie mai mare decât 3 și 10/71 și mai mică decât 3 și 1/7. Pe vremea când nu exista nici o metodă de reprezentare a numerelor foarte mari, a inventat un sistem care îi permitea nu numai să le scrie, dar și să opereze cu ele, oricât ar fi fost de mari. În fizică, Arhimede a descoperit legile plutirii corpurilor, punând astfel bazele hidrostaticii. În plus, a calculat centrele de greutate pentru numeroase corpuri și a formulat legile mecanice ale pârghiilor. În astronomie, a făcut observații pentru a determina durata anului și distanțele până la planete.

Studiile multor matematicieni greci se caracterizau prin originalitate și meticulozitate, dar metodele de raționament și de rezolvare ale lui Arhimede îl distingeau de toți savanții epocii sale. Dați-mi voie să vă prezint trei exemple reprezentative care vă pot da o idee despre inventivitatea lui Arhimede. La prima vedere, unul dintre ele pare să nu fie decât o curiozitate amuzantă, dar o privire mai atentă dezvăluie ascuțimea minții sale. Celelalte două exemple privind metodele lui Arhimede demonstrează de asemenea o gândire atât de avansată față de epoca sa, încât îl ridică imediat pe Arhimede la rangul de „magician“.

Arhimede era fascinat de numerele mari. Dar numerele foarte mari sunt incomod de exprimat cu notații obișnuite (încercați să completați un cec de 8,4 bilioane de dolari, datoria națională a Statelor Unite pe 6 iulie 2006, în spațiul alocat sumei în cifre). Astfel, Arhimede a creat un sistem care îi permitea să reprezinte numere

cu 80 000 de bilioane de cifre. A folosit acest sistem într-un tratat original intitulat *Arenarium*, pentru a dovedi că numărul total de fire de nisip din lume nu e infinit.

Chiar și introducerea la acest tratat este atât de edificatoare încât o voi reproduce parțial aici (tratatul îi era în întregime dedicat lui Gelon, fiul regelui Hieron al II-lea):

> Unii cred, rege Gelon, că numărul firelor de nisip este infinit; și înțeleg prin nisip nu numai acela care există în preajma Siracuzei și în restul Siciliei, dar și cel ce se găsește în toate regiunile locuite și nelocuite. Fără a-l considera infinit, sunt iarăși unii care cred că nu a fost numit încă un număr suficient de mare pentru a depăși mulțimea firelor de nisip. Și este limpede că cei care susțin aceasta, dacă și-ar închipui o cantitate de nisip la fel de mare ca Pământul, cuprinzând toate mările și adâncimile pământului umplute până la o înălțime egală cu cea a celor mai înalți munți, ar fi încă foarte departe de a recunoaște că poate fi exprimat orice număr care depășește mulțimea nisipului astfel considerat. Dar voi încerca să arăt, folosindu-mă de demonstrații geometrice pe care le veți putea urmări, că, printre numerele numite de mine și date în lucrarea pe care i-am trimis-o lui Zeuxippos [lucrare pierdută, din păcate], unele depășesc nu doar numărul reprezentând cantitatea de nisip egală ca mărime cu Pământul umplut așa cum am arătat, dar și cantitatea egală cu mărimea universului. Știți că „univers“ este numele dat de majoritatea astronomilor sferei al cărei centru este centrul Pământului și a cărei rază este egală cu linia dreaptă care unește centrul Soarelui cu centrul Pământului. Aceasta este versiunea obișnuită, așa cum o veți fi auzit de la astronomi. Dar Aristarh din Samos a scos o carte conținând unele ipoteze în care premisele conduc la rezultatul că universul este cu mult mai mare decât ceea ce numim acum univers. Ipotezele sale spun că stelele fixe și Soarele rămân în repaus, că Pământul se rotește în jurul Soarelui pe circumferința unui cerc, având Soarele în centrul orbitei.

Această introducere scoate imediat în evidență două idei importante: (1) Arhimede era pregătit să pună la îndoială chiar și credințe foarte răspândite (de pildă, existența unei infinități de fire de nisip) și (2) trata cu respect teoria heliocentrică a astronomului Aristarh (el corecta de fapt în tratatul său una dintre ipotezele lui Aristarh). În universul lui Aristarh, Pământul și planetele se învârteau în jurul unui Soare fix, plasat în centru (amintiți-vă că acest model a fost propus cu 1800 de ani înainte de Copernic!). După aceste observații preliminare, Arhimede abordează problema firelor de nisip, avansând printr-o serie de pași logici. Întâi estimează câte fire de nisip așezate unul lângă altul sunt necesare pentru a acoperi diametrul unei semințe de mac. Apoi, câte semințe de mac ar acoperi lățimea unui deget, câte degete sunt într-un stadiu (aproximativ 200 m) și pe urmă în 10 miliarde de stadii. Pe drum, Arhimede inventează un sistem de indici și o notație care, atunci când sunt combinate, permit clasificarea numerelor uriașe. Presupunând că sfera stelelor fixe e mai mică decât de zece milioane de ori sfera care conține orbita Soarelui (așa cum se vede de pe Pământ), Arhimede găsește că numărul firelor de nisip din universul umplut-ochi cu nisip este mai mic decât 10^{63} (unu urmat de șaizeci și trei de zerouri). Încheie apoi tratatul adresându-se cu respect lui Gelon:

> Înțeleg, rege Gelon, că aceste lucruri vor părea de necrezut pentru marea majoritate a oamenilor care nu au studiat matematica, dar celor cunoscători și care au studiat problema distanțelor și dimensiunilor Pământului, Soarelui și Lunii, precum și a întregului univers, demonstrația le va părea convingătoare. De aceea m-am gândit că nu e nepotrivit să vă supun atenției acest subiect.

Frumusețea *Arenarium*-ului constă în ușurința cu care Arhimede sare de la obiectele de zi cu zi (semințe de mac, nisip, degete) la numere abstracte și notații matematice, apoi de la acestea la dimensiunile sistemului solar și universului în întregul său. Evident, Arhimede poseda o asemenea flexibilitate intelectuală, încât putea

cu ușurință folosi matematica pentru a descoperi proprietăți necunoscute ale universului, și putea folosi caracteristici cosmice pentru a elabora concepte aritmetice.

Arhimede mai poate fi numit „magician“ și pentru metoda prin care a ajuns la multe dintre remarcabilele sale teoreme de geometrie. Până în secolul XX s-a știut foarte puțin despre această metodă și despre felul în care raționa Arhimede în general. Stilul său concis nu lăsa să se întrevadă prea multe indicii. Apoi, în 1906, o descoperire spectaculoasă ne-a făcut să pătrundem în mintea acestui geniu. Povestea acestei descoperiri seamănă atât de mult cu un roman istoric polițist de Umberto Eco, încât mă simt obligat să fac un scurt ocol pentru a o istorisi.

Palimpsestul lui Arhimede

Cândva în secolul X, un scrib anonim din Constantinopol a copiat trei lucrări importante ale lui Arhimede: *Metoda*, *Stomachion* și *Despre corpurile care plutesc*. Această activitate ținea pesemne de interesul general față de matematica greacă, în mare măsură trezit de Leon Geometrul, matematician din secolul IX. În 1204, soldații celei de-a patra Cruciade au devastat Constantinopolul – în anii următori pasiunea pentru matematică a pălit, iar schisma dintre Biserica Catolică din Apus și Biserica Ortodoxă din Răsărit a devenit un fapt împlinit. Cândva înainte de 1229, manuscrisul conținând lucrările lui Arhimede a fost supus unei acțiuni catastrofale de reciclare – a fost dezlegat și spălat, astfel încât foile de pergament să poată fi refolosite pentru o carte de rugăciuni creștină. Copistul Ioannes Myronas a terminat de copiat cartea de rugăciuni pe 14 aprilie 1229. Din fericire, spălarea textului original nu a șters complet scrierea inițială. Prin secolul XVI, palimpsestul – documentul reciclat – ajunsese cumva în Țara Sfântă, la mânăstirea Sf. Sava, la est de Betleem. La începutul secolului XIX, biblioteca mânăstirii conținea nu mai puțin de o mie de manuscrise. Dar, din motive nu tocmai clare, palimpsestul lui Arhimede a fost dus iar

înapoi la Constantinopol. Apoi, în 1840, celebrul specialist german în Biblie Constantin von Tischendorf (1815–1874), descoperitorul unuia dintre primele manuscrise ale Bibliei, a vizitat biblioteca Metochion a Sfântului Mormânt din Constantinopol (filială a Patriarhatului Grec din Ierusalim) și a văzut palimpsestul acolo. Tischendorf trebuie să fi găsit foarte bizar textul matematic de dedesubt, parțial vizibil, căci se pare că a smuls și furat o pagină din manuscris. În 1879, acea pagină din moștenirea lui Tischendorf a fost vândută Bibliotecii Universității din Cambridge.

În 1899, specialistul grec A. Papadopoulos-Kerameus a catalogat toate manuscrisele adăpostite la Metochion, iar manuscrisul lui Arhimede apare pe lista sa ca Ms. 355. Papadopoulos-Kerameus a putut citi câteva rânduri din textul matematic și, înțelegând poate importanța sa, a reprodus acele rânduri în catalogul său. A fost un moment de cotitură în saga manuscrisului. Textul matematic din catalog a fost adus la cunoștința filologului danez Johan Ludvig Heiberg (1854–1928). Recunoscând că textul îi aparține lui Arhimede,

Figura 12

Heiberg s-a dus la Istanbul în 1906, a examinat și fotografiat palimpsestul, iar un an mai târziu și-a anunțat senzaționala descoperire – două tratate nevăzute până atunci și unul cunoscut doar din traducerea în latină, aparținându-i lui Arhimede. Deși Heiberg a putut citi și, mai târziu, publica părți din manuscrise în cartea sa despre lucrările lui Arhimede, au rămas goluri serioase. Din păcate, cândva după 1908, manuscrisul a dispărut de la Istanbul în împrejurări misterioase, pentru a reapărea în posesia unei familii pariziene, care pretindea că îl deținea din anii ’20. Păstrat în condiții neadecvate, palimpsestul se deteriorase ireversibil din cauza mucegaiului, iar trei pagini transcrise anterior de Heiberg dispăruseră complet. În plus, după 1929, cineva a pictat patru miniaturi în stil bizantin, acoperind patru pagini. În cele din urmă, familia franceză care deținea manuscrisul l-a trimis spre licitație la Christie’s. Proprietatea asupra manuscrisului a fost disputată la tribunalul federal din New York în 1998. Patriarhia ortodoxă de la Ierusalim pretindea că manuscrisul fusese furat în anii ’20 dintr-una din mânăstirile sale, dar judecătorul a hotărât în favoarea casei Christie’s. Palimpsestul a fost ulterior supus licitației de către Christie’s pe 29 octombrie 1998 și a adus 2 milioane de dolari din partea unui cumpărător anonim. Proprietarul a depus manuscrisul lui Arhimede la Muzeul de Artă Walters din Baltimore, unde e încă supus unor intense lucrări de restaurare și examinare amănunțită. Cercetătorii au astăzi la dispoziție metode de investigație inexistente în trecut. Lumina ultravioletă, analiza multispectrală și chiar razele X focalizate (la care a fost expus manuscrisul la Stanford) au contribuit deja la descifrarea unor părți de manuscris necunoscute până atunci. În prezent, este în curs analiza atentă a manuscrisului lui Arhimede. Am avut norocul să întâlnesc echipa care studiază palimpsestul, iar figura 13 mă înfățișează lângă dispozitivul experimental care iradiază cu lumină de diferite lungimi de undă o pagină a palimpsestului.

Toată vâlva care înconjoară palimpsestul este pe măsura unui document care ne face să întrevedem pentru prima oară metoda marelui geometru.

Figura 13

Metoda

Când citim o carte despre geometria greacă ne impresionează concizia și precizia cu care au fost formulate și demonstrate acele teoreme cu mai bine de două milenii în urmă. Aceste cărți nu oferă însă indicații privind felul în care au fost inițial concepute teoremele. Excepționalul document al lui Arhimede, *Metoda*, umple parțial acest gol – ne dezvăluie cum s-a convins Arhimede de adevărul anumitor teoreme înainte de a ști să le demonstreze. Iată o parte din cele scrise în introducere și adresate matematicianului Eratostene din Cyrene (cca 276–194 î. Cr.):

> Îți voi trimite demonstrațiile teoremelor în această carte. Pentru că, așa cum am spus, știu că ești stăruitor, bun dascăl de filozofie și foarte interesat de cercetările matematice care ți s-ar putea ivi în cale, m-am gândit că ar fi nimerit să scriu pentru dumneata, tot în cartea de față, o metodă specială

> care permite recunoașterea anumitor probleme de matematică *cu ajutorul mecanicii* [s. m.]. Sunt convins că aceasta e de asemenea folositoare la găsirea demonstrațiilor aceloraşi teoreme. Căci anumite lucruri care mi-au devenit limpezi prin metoda mecanică au fost apoi demonstrate geometric, pentru că studiul lor prin numita metodă nu oferă o adevărată demonstrație. Căci e mai uşor de dat demonstrația după ce ai dobândit, cu ajutorul metodei, ceva cunoştințe asupra problemei, decât atunci când trebuie s-o găseşti fără nici un fel de cunoştințe prealabile.

Arhimede atinge aici unul dintre cele mai importante aspecte ale cercetării științifice şi matematice – este adesea mai greu să descoperi care sunt problemele sau teoremele importante decât să găseşti soluții la probleme cunoscute sau demonstrații pentru teoreme cunoscute. Aşadar, cum a descoperit Arhimede noi teoreme? Folosind cunoştințele pe care le avea privind mecanica, echilibrul şi legile pârghiilor, a comparat în minte corpuri sau figuri ale căror volume sau arii voia să le găsească cu cele pe care le cunoştea deja. După ce determina astfel răspunsul pentru aria necunoscută sau volumul necunoscut, îi era mult mai uşor să demonstreze geometric corectitudinea răspunsului. Prin urmare, *Metoda* începe cu un număr de afirmații despre centrele de greutate şi continuă cu propozițiile geometrice şi demonstrațiile acestora.

Metoda lui Arhimede este extraordinară din două motive. Întâi, pentru că introduce noțiunea de *experiment mintal* în cercetarea riguroasă. Hans Christian Ørsted, fizician din secolul XIX, a numit acest instrument – un experiment imaginar care se substituie unuia real – *Gedankenexperiment* (în germană: „experiment care are loc în gând“). În fizică, unde acest concept a fost foarte rodnic, experimentele mintale sunt folosite fie pentru a ne face o idee înainte de realizarea efectivă a experimentului, fie în cazuri în care experimentele reale nu pot fi efectuate. În al doilea rând, şi mai important, Arhimede a eliberat matematica de lanțurile oarecum artificiale cu care o legaseră Euclid şi Platon. Pentru cei doi, nu exista decât un mod, şi unul singur, de a face matematică.

Trebuia început de la axiome și continuat cu un șir inexorabil de pași logici, folosind instrumente bine determinate. Pe de altă parte, Arhimede, spirit liber, folosea pur și simplu orice fel de muniție care îi venea în minte pentru a formula noi probleme și a le rezolva. Nu a ezitat să exploreze și să exploateze legăturile dintre obiectele matematice abstracte (formele platoniciene) și realitatea fizică (obiecte plate sau corpuri) pentru a face să progreseze matematica.

O ilustrare finală care întărește și mai mult statutul de magician al lui Arhimede este faptul că a anticipat *calculul diferențial și integral* – ramură a matematicii creată de Newton (și, independent, de matematicianul german Leibniz) abia la sfârșitul secolului XVII.

Ideea elementară de la baza procesului de *integrare* e foarte simplă (odată dezvăluită!). Să presupunem că trebuie să determinăm aria unui segment de elipsă. Putem împărți aria în dreptunghiuri de lățime egală și aduna ariile acestor dreptunghiuri (figura 14). E limpede că, cu cât folosim mai multe dreptunghiuri, cu atât suma lor se va apropia mai mult de aria reală a segmentului. Cu alte cuvinte, aria segmentului este într-adevăr egală cu limita spre care tinde suma dreptunghiurilor atunci când numărul dreptunghiurilor tinde spre infinit. Găsirea acestei limite se numește *integrare*. Arhimede a folosit o variantă a acestei metode pentru a afla volumele și ariile suprafețelor sferei, conului, elipsoizilor și paraboloizilor (corpuri care se obțin prin rotirea elipselor și parabolelor în jurul propriilor axe).

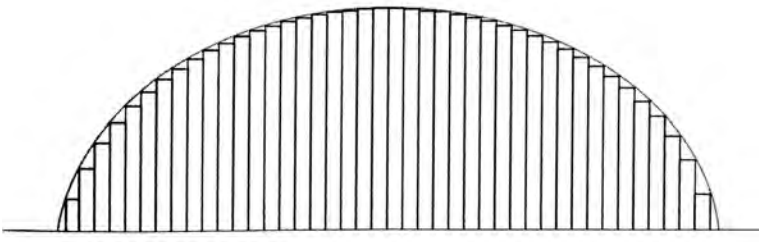


Figura 14

În *calculul diferențial*, unul dintre scopurile principale este găsirea pantei unei drepte tangente la o curbă într-un punct dat, adică dreapta care atinge curba doar în acel punct. Arhimede a rezolvat problema pentru cazul particular al spiralei, anticipând astfel cercetările viitoare ale lui Newton și Leibniz. Astăzi, calculul diferențial și integral și ramurile care derivă din ele formează baza pe care sunt construite majoritatea modelelor matematice din fizică, inginerie, economie sau dinamica populațiilor.

Arhimede a schimbat profund lumea matematicii și relația ei cu cosmosul. Etalând o uimitoare combinație de preocupări teoretice și practice, el a oferit prima dovadă empirică, iar nu mitică, în sprijinul ideii că natura ascultă de un plan matematic. Ideea că matematica e limbajul universului, și deci că Dumnezeu e matematician, a apărut în cercetările lui Arhimede. Există totuși ceva ce Arhimede n-a făcut – nu a vorbit niciodată despre limitările modelelor matematice atunci când sunt aplicate la condiții fizice reale. Discuțiile sale teoretice despre pârghii, de pildă, presupun că acestea sunt perfect rigide și că barele nu au greutate. Prin urmare, a deschis oarecum calea interpretării modelelor matematice ca „salvare a aparențelor" – ceea ce înseamnă că modelele matematice pot reprezenta doar ce observă oamenii și nu pot descrie realitatea fizică adevărată, efectivă. Matematicianul grec Geminos (cca 10 î. Cr. – 60 d. Cr.) a fost primul care a sesizat diferența între modelarea matematică și explicațiile fizice în legătură cu mișcarea corpurilor cerești. El a făcut distincția între astronomi (sau matematicieni), care, după părerea sa, nu trebuie decât să propună modele care să *reproducă* mișcările observate pe cer, și fizicieni, care trebuie să găsească *explicații* pentru mișcările reale. Această distincție avea să ajungă la un punct critic în vremea lui Galilei, despre care voi vorbi mai târziu în acest capitol.

Surprinzător poate, una dintre realizările pe care Arhimede însuși le prețuia cel mai mult a fost descoperirea faptului că volumul unei sferei înscrise într-un cilindru (figura 15) este întotdeauna 2/3 din volumul cilindrului. Acest rezultat l-a bucurat atât de mult, încât a cerut să-i fie cioplit pe piatra de mormânt. La 137

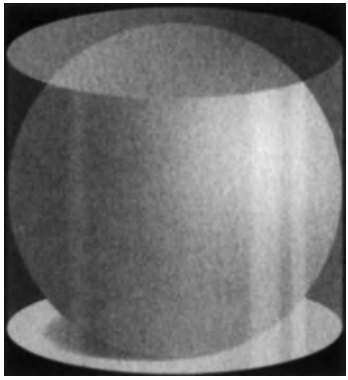


Figura 15

de ani de la moartea lui Arhimede, celebrul orator roman Marcus Tullius Cicero (cca 106–43 î. Cr.) a descoperit mormântul marelui matematician. Iată tulburătoarea relatare a evenimentului, dată de Cicero:

> Pe când mă aflam chestor în Sicilia, am reușit să dau de urma mormântului său [al lui Arhimede]. Locuitorii Siracuzei nu știau nimic despre mormânt și chiar negau că ar fi existat. Dar se afla acolo, complet înconjurat și ascuns de tufișuri de muri și mărăcini. Îmi aminteam că auzisem de câteva rânduri simple, în versuri, care ar fi fost înscrise pe mormântul său, despre o sferă și un cilindru, cioplite în piatră deasupra mormântului. Așa că m-am uitat atent la toate mormintele de lângă Poarta Agrigentină. În cele din urmă, am observat o micuță coloană abia vizibilă deasupra tufărișului: purta deasupra o sferă și un cilindru. Le-am spus imediat însoțitorilor mei din Siracuza, cetățeni de vază ai orașului, că bănuiam că acesta era tocmai lucrul pe care îl căutam. Oameni înarmați cu seceri au fost trimiși să curețe locul, iar când cărarea spre monument a fost deschisă, ne-am îndreptat direct spre el. Versurile erau încă vizibile, deși cam

> a doua jumătate a fiecărui rând se ştersese. Astfel, unul dintre cele mai faimoase oraşe din lumea greacă, iar în trecut de asemenea un mare centru al ştiinţei, n-ar fi ştiut nimic despre mormântul celui mai strălucit cetăţean pe care l-a avut vreodată, dacă un bărbat din Arpinum n-ar fi venit să-l descopere!

Cicero n-a exagerat importanţa lui Arhimede. De fapt, am aşezat în mod deliberat atât de sus ştacheta titlului de „magician“ pentru ca, pornind de la titanul Arhimede, să putem face un salt de optsprezece secole pentru a întâlni un bărbat de statură comparabilă. Spre deosebire de Arhimede, care spunea că ar putea urni Pământul din loc, acest magician a arătat că Pământul se mişca deja.

Cel mai bun discipol al lui Arhimede

Galileo Galilei (figura 16) se naşte la Pisa pe 15 februarie 1564. Tatăl său, Vincenzo, era muzician, iar mama, Giulia Ammanati, era o femeie plină de spirit, chiar dacă mai curând răutăcioasă, care nu suporta prostia. În 1581, Galileo urmează sfatul tatălui şi se înscrie la facultatea de arte a Universităţii din Pisa pentru a studia medicina. Interesul său pentru medicină păleşte în favoarea matematicii, de îndată ce intră la universitate. Prin urmare, în vacanţa de vară a lui 1583, îl roagă pe matematicianul Curţii toscane, Ostilio Ricci (1540–1603), să se întâlnească cu tatăl său pentru a-l convinge că Galileo era menit să devină matematician. Problema e într-adevăr tranşată curând după aceea, iar tânărul entuziast e fermecat de lucrările lui Arhimede: „Cei care-i citesc scrierile“, spune el, „îşi dau limpede seama cât de jos sunt toate celelalte minţi în comparaţie cu a lui Arhimede şi ce palidă e speranţa de a descoperi lucruri pe potriva celor descoperite de el.“ La vremea aceea Galilei nu ştia că el însuşi avea una dintre puţinele minţi care nu erau mai prejos de cea a magistrului grec. Inspirat de legendara poveste a lui Arhimede şi a coroanei regelui, Galilei publică în

Figura 16

1586 o cărţulie intitulată *Mica balanţă*, despre o balanţă hidrostatică pe care o inventase. El vorbeşte mai târziu despre Arhimede într-o conferinţă literară ţinută la Academia din Florenţa, în care prezintă un subiect mai puţin obişnuit – amplasarea şi dimensiunile iadului în *Infernul* lui Dante.

În 1589, Galilei e numit la catedra de matematică a Universităţii din Pisa, în parte datorită călduroasei recomandări a lui Christophorus Clavius (1538–1612), reputat matematician şi astronom din Roma, pe care Galilei îl vizitase în 1587. Steaua tânărului matematician e în ascensiune. Galilei îşi petrece următorii trei ani expunând primele sale concluzii privind teoria mişcării. Aceste scrieri, evident stimulate de opera lui Arhimede, conţin un amestec fascinant de idei interesante şi afirmaţii false. De pildă, alături de înţelegerea, pentru prima dată, a faptului că se pot testa teoriile căderii corpurilor folosind un plan înclinat pentru a încetini mişcarea, Galilei afirmă în mod greşit că, atunci când corpurile sunt lăsate să cadă din turnuri, „lemnul se mişcă mai repede decât plumbul la începutul deplasării sale“. Înclinaţiile şi concluziile generale

ale lui Galilei din această perioadă a vieții sale au fost răstălmăcite de primul său biograf, Vincenzio Viviani (1622–1703). Viviani a creat imaginea populară a unui experimentator meticulos care a dobândit o perspectivă nouă și pătrunzătoare din observarea amănunțită a fenomenelor naturii. De fapt, până în 1592, când se mută la Padova, orientarea și metodologia lui Galilei erau în primul rând matematice. Se baza mai mult pe experimente mintale și pe reprezentarea lumii după modelul lui Arhimede, prin figuri geometrice care ascultă de legi matematice. Cea mai mare nemulțumire față de Aristotel se lega pe atunci de faptul că acesta „era ignorant nu numai în ce privește descoperirile profunde și subtile din geometrie, dar și în privința celor mai elementare principii ale științei". Galilei credea și că Aristotel se baza prea mult pe experiențele senzoriale, „căci ele oferă, la prima vedere, o oarece aparență de adevăr". Galilei propune în schimb „folosirea mereu a raționamentului în locul exemplelor (din moment ce noi căutăm cauzele efectelor, iar acestea nu sunt dezvăluite de experiență.)"

Tatăl lui Galilei moare în 1591, și astfel Galilei, care acum trebuie să-și întrețină familia, acceptă un post la Padova, unde primește un salariu de trei ori mai mare. Următorii optsprezece ani se dovedesc a fi cei mai fericiți din viața lui Galilei. La Padova începe și relația sa de lungă durată cu Marina Gamba, cu care nu s-a căsătorit niciodată, dar care i-a dăruit trei copii – Virginia, Livia și Vincenzio.

Pe 4 august 1597, Galilei îi scrie o scrisoare personală marelui astronom german Johannes Kepler, în care recunoaște că era copernican „de multă vreme", adăugând că găsise în modelul heliocentric copernican o cale de a explica unele evenimente naturale ce nu puteau fi explicate de doctrina geocentrică. Deplângea faptul că totuși Copernic „părea să fie ridiculizat și hulit". Această scrisoare marchează lărgirea prăpastiei dintre Galilei și cosmologia aristotelică. Cosmologia modernă începea să capete formă.

Vestitorul stelar

În seara de 9 octombrie 1604, astronomii din Verona, Roma și Padova au fost surprinși să descopere o nouă stea care a devenit rapid mai strălucitoare decât toate stelele de pe cer. Meteorologul Jan Brunowski, funcționar imperial la Praga, a văzut-o și el pe 10 octombrie și, cuprins de o mare agitație, l-a informat imediat pe Kepler. Norii l-au împiedicat pe Kepler să observe steaua până pe 17 octombrie, dar apoi și-a înregistrat observațiile timp de aproape un an, publicând în cele din urmă o carte despre „noua stea" în 1606. Știm astăzi că spectacolul ceresc din 1604 nu a marcat nașterea unei noi stele, ci moartea prin explozie a uneia bătrâne. Acest eveniment, numit acum *supernova lui Kepler*, a provocat o senzație stranie la Padova. Galilei a reușit să vadă noua stea cu ochii săi la sfârșitul lui octombrie 1604, iar în lunile decembrie și ianuarie a ținut trei conferințe publice pe această temă, în fața unui public larg. Apelând la știință, iar nu la superstiții, Galilei a arătat că absența oricărei deplasări aparente (*paralaxă*) a poziției noii stele (față de fondul stelelor fixe) demonstra că noua stea trebuia localizată dincolo de regiunea lunară. Importanța acestei observații a fost imensă. În lumea aristotelică, toate schimbările din cer se limitau la această zonă până la Lună, iar sfera mult mai îndepărtată a stelelor fixe se presupunea că e sacră și imună la schimbări.

Distrugerea sferei imuabile începuse deja în 1572, când astronomul danez Tycho Brahe (1546–1601) observase o altă explozie stelară cunoscută acum ca *supernova lui Tycho.* Evenimentul din 1604 a mai bătut un cui în sicriul cosmologiei lui Aristotel. Dar adevărata breșă în înțelegerea cosmosului nu s-a produs nici pe tărâmul speculației teoretice, nici pe cel al observațiilor cu ochiul liber. Ea a fost rezultatul unui experiment simplu cu lentile de sticlă convexe (bombate spre exterior) și concave (curbate spre interior) – două dintre acestea, ținute la vreo 33 cm una de alta, fac ca obiectele depărtate să pară brusc mai apropiate. Prin 1608, astfel de lentile începuseră să apară peste tot în Europa, iar un fabricant de ochelari olandez și doi flamanzi depuseseră chiar cereri

pentru a le breveta. Zvonuri în legătură cu miraculosul instrument ajung la urechile teologului venețian Paolo Sarpi, care îl informează pe Galilei în mai 1609. Nerăbdător să confirme informația, Sarpi îi scrie unui prieten din Paris, Jacques Badovere, pentru a afla dacă zvonurile erau întemeiate. Potrivit propriei sale mărturisiri, Galilei „a fost cuprins de dorință față de frumosul obiect". Avea să prezinte mai târziu aceste evenimente în cartea sa *Vestitorul stelar*, apărută în martie 1610:

> Acum vreo zece luni, mi-a ajuns la urechi vestea că un anume Fleming a construit o lunetă cu ajutorul căreia diverse obiecte, deși foarte depărtate de ochiul observatorului, erau văzute clar ca și cum ar fi fost în apropiere. Au fost relatate mai multe experiențe ale acestui remarcabil efect, cărora unii oameni le dau crezare, în vreme ce alții le neagă. Câteva zile mai târziu, vestea mi-a fost confirmată într-o scrisoare din partea unui nobil francez din Paris, Jacques Badovere, ceea ce m-a convins să mă dedic cu trup și suflet cercetării mijloacelor prin care aș putea ajunge la inventarea unui instrument asemănător. Ceea ce am făcut curând după aceea, bazându-mă pe legea refracției.

Galilei dovedește aici același tip de gândire practică creatoare ca Arhimede – odată ce a aflat că telescopul putea fi construit, nu i-a luat mult până să construiască el însuși unul. Mai mult, între august 1609 și martie 1610, Galilei și-a folosit inventivitatea pentru a îmbunătăți puterea de mărire a telescopului său de la opt la douăzeci de ori. Această realizare constituia în sine o performanță tehnică, dar geniul lui Galilei se va dezvălui nu prin îndemânarea sa practică, ci prin întrebuințarea dată tubului de mărire a imaginii (pe care l-a numit *perspicillium*). În loc de a privi corăbii din largul coastelor Veneției sau de a examina acoperișurile din Padova, Galilei și-a îndreptat telescopul spre cer. A urmat un lucru fără precedent în istoria științei. După cum spunea istoricul științei Noel Swerdlow, „În vreo două luni, decembrie și ianuarie [1609 și, respectiv, 1610], a făcut mai multe descoperiri care au schimbat

lumea decât făcuse vreodată cineva până la el". De fapt, anul 2009 a fost numit Anul Internațional al Astronomiei pentru a marca cea de-a patru suta aniversare a primelor observații ale lui Galilei. Ce a făcut de fapt Galilei pentru a deveni un erou al științei? Iată câteva dintre surprinzătoarele sale descoperiri folosind telescopul.

Îndreptându-și telescopul spre Lună și studiind linia care separă partea luminată de Soare de cea întunecată de pe discul Lunii, Galilei a descoperit că acest corp ceresc avea o suprafață neregulată, cu munți, cratere și câmpii întinse. A urmărit cum apăreau punctele strălucitoare pe partea acoperită de întuneric și cum aceste gămălii luminoase se lărgeau și se răspândeau întocmai ca lumina Soarelui care răsare și atinge vârfurile munților. A folosit până și geometria razelor de lumină pentru a determina înălțimea unuia dintre munți, care s-a dovedit a fi de peste 6 km. Dar asta nu a fost tot. Galilei a observat că fața întunecată a Lunii (în faza crescătoare) este și ea slab luminată, și a tras concluzia că acest fapt se datora luminii Soarelui reflectate de Pământ. Galilei afirmă că, la fel cum Pământul e luminat de Luna plină, suprafața lunară se scaldă în lumina reflectată de Pământ.

Dacă unele dintre aceste descoperiri nu erau cu totul noi, tăria dovezilor aduse de Galilei ridică discuția la un alt nivel. Până în epoca lui Galilei, exista o distincție clară între terestru și ceresc, pământean și divin. Diferența nu era doar științifică sau filozofică. Mitologia, religia, poezia romantică și sensibilitatea estetică țesuseră o bogată tapiserie în jurul văditei deosebiri dintre cer și pământ. Acum Galilei spunea ceva de neconceput. Contrar doctrinei aristotelice, Galilei pune practic pe același plan Pământul și un corp divin (Luna) – ambele au suprafețe solide, neregulate și reflectă lumina Soarelui.

Trecând dincolo de Lună, Galilei începe să observe planetele – numele inventat de greci pentru acești „rătăcitori" pe cerul nopții. Îndreptându-și telescopul spre Jupiter pe 7 ianuarie 1610, este uimit să descopere trei noi stele aliniate pe o linie care traversa planeta, două la est și una la vest. Noile stele păreau să-și fi schimbat poziția față de Jupiter în nopțile următoare. Pe 13 ianuarie, observă o a

patra asemenea stea. După o săptămână de la descoperirea inițială, Galilei ajunge la o concluzie surprinzătoare – noile stele erau de fapt sateliți care se învârteau în jurul lui Jupiter, la fel cum Luna se învârtea în jurul Pământului.

Una dintre trăsăturile distinctive ale celor care au marcat istoriei științei este capacitatea lor de a pricepe imediat care descoperiri sunt cu adevărat ieșite din comun. Altă trăsătură a multor savanți de forță este talentul de a-i face pe ceilalți să înțeleagă descoperirile lor. Galilei era un maestru în ambele privințe. Îngrijorat de faptul că și altcineva ar putea descoperi sateliții lui Jupiter, Galilei s-a grăbit să-și publice rezultatele, iar în primăvara lui 1610 îi apărea la Veneția tratatul *Sidereus nuncius* (*Vestitorul stelar*). Încă abil din punct de vedere politic în acel moment al vieții sale, Galilei îi dedică tratatul marelui duce al Toscanei, Cosimo al II-lea de Medici, și numește sateliții „Stelele medicee". Doi ani mai târziu, în urma unei munci pe care a numit-o „de proporții atlantice", Galilei a putut determina perioadele de rotație – timpul în care fiecare satelit se învârtea în jurul lui Jupiter – cu o precizie de câteva minute. *Vestitorul stelar* a devenit într-o clipă un bestseller – cele cinci sute de exemplare inițiale s-au epuizat rapid –, făcându-l pe Galilei celebru pe întregul continent.

Importanța descoperirii sateliților lui Jupiter e colosală. Nu numai că erau primele corpuri adăugate sistemului solar de la observațiile grecilor încoace, dar simpla existență a acestor sateliți a suprimat dintr-o singură lovitură una dintre cele mai serioase obiecții aduse teoriei lui Copernic. Aristotelicienii susțineau că era imposibil ca Pământul să se rotească în jurul Soarelui, pentru că Luna se învârtea în jurul Pământului. Cum putea avea universul două centre de rotație, Soarele și Pământul? Descoperirea lui Galilei arăta fără putință de tăgadă că o planetă putea avea sateliți învârtindu-se în jurul ei, în timp ce planeta însăși își urma propriul drum în jurul Soarelui.

Altă descoperire importantă făcută de Galilei în 1610 este cea a fazelor planetei Venus. În doctrina geocentrică, se presupunea că Venus se mișca pe un cerc mic (un *epiciclu*) suprapus peste

orbita sa în jurul Pământului, iar centrul epiciclului se afla întotdeauna pe linia care unește Pământul și Soarele (ca în figura 17a; desenul nu este la scară). În acest caz, atunci când observația e efectuată de pe Pământ, ne-am aștepta ca Venus să apară mereu ca o semilună de lățime variabilă. Pe de altă parte, în sistemul lui Copernic, imaginea lui Venus trebuie să se transforme de la un mic disc strălucitor, atunci când planeta se află de cealaltă parte a Soarelui (văzut de pe Pământ), la un disc mare și aproape întunecat, atunci când Venus e de aceeași parte cu Pământul (figura 17b). Între aceste două poziții, Venus trebuie să treacă printr-o serie de faze similare cu cele ale Lunii. Galilei a purtat o corespondență legată de această diferență importantă între previziunile celor două doctrine cu fostul său elev Benedetto Castelli (1578–1643) și a efectuat observații cruciale între octombrie și decembrie 1610. Verdictul era clar. Observațiile au confirmat previziunile lui Copernic, dovedind că Venus se rotea într-adevăr în jurul Soarelui. Pe 11 decembrie, aflat în dispoziție ludică, Galilei îi trimite lui Kepler o anagramă obscură „*Haec immatura a mei am frustra leguntur oy*“ („Acest lucru a fost încercat de mine în van prea devreme“). Kepler a încercat fără succes să descifreze mesajul ascuns și, în cele din urmă, a renunțat. În următoarea sa scrisoare, pe 1 ianuarie 1611, Galilei permută în sfârșit literele anagramei: „*Cynthiae figuras aemulatur mater amorum*“ („Mama iubirii [Venus] imită figurile Cynthiei [Luna]“).

Toate descoperirile prezentate până aici privesc fie planete ale sistemului solar – corpuri cerești care se rotesc în jurul Soarelui și îi reflectă lumina –, fie sateliți rotindu-se în jurul acestor planete. Galilei a făcut și descoperiri importante legate de stele – corpuri cerești care emană propria lor lumină, cum e Soarele. Întâi, face observații asupra Soarelui însuși. În viziunea aristotelică se presupunea că Soarele simboliza desăvârșirea și imuabilul nepământean. Închipuiți-vă șocul provocat de descoperirea că suprafața Soarelui era departe de a fi perfectă. Ea conține pete și puncte întunecate care apar și dispar pe măsură ce Soarele se rotește în jurul propriei axe. Figura 18 înfățișează petele Soarelui desenate de mâna lui

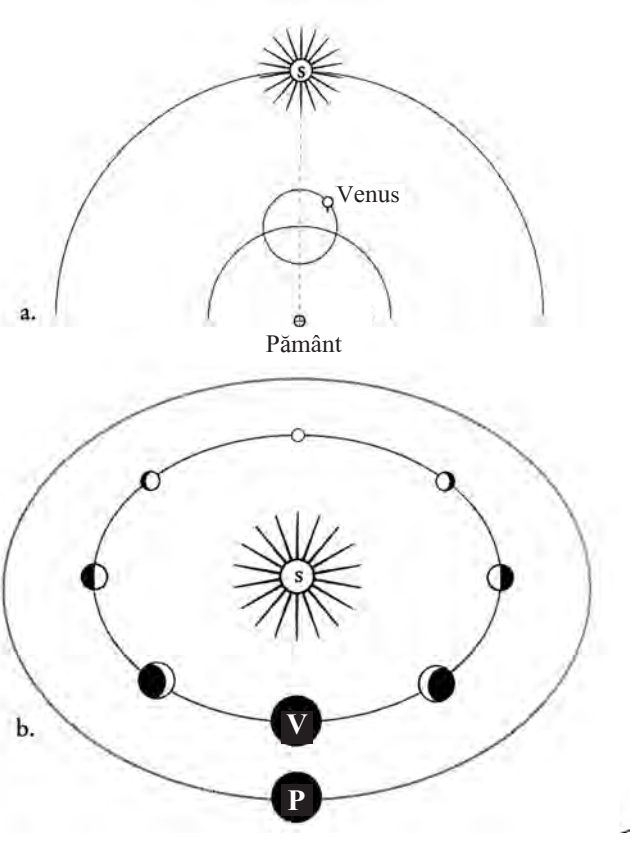


Figura 17

Galilei, despre care colegul acestuia, Federico Cesi (1585–1630), scria că „încântă deopotrivă prin minunăția priveliștii și prin precizia expresiei“. De fapt, Galilei nu era primul care să fi văzut petele din Soare, nici primul care să fi scris despre ele. Broșura *Trei scrisori despre petele solare*, scrisă de preotul și savantul iezuit Christopher Scheiner (1573–1650) l-a deranjat atât de tare pe Galilei, încât s-a simțit obligat să publice o ripostă bine articulată. Scheiner susținea că era imposibil ca petele să se afle chiar pe

suprafața Soarelui. Afirmația sa se baza parțial pe faptul că petele erau, după părerea sa, prea întunecate (credea că sunt mai întunecate decât părțile întunecate ale Lunii), și parțial pe faptul că nu păreau să revină în aceleași poziții. În consecință, Scheiner credea că acestea erau mici planete care se învârteau în jurul Soarelui. În *Relatare și demonstrații cu privire la petele solare și la schimbările lor*, Galilei distruge sistematic argumentele lui Scheiner, unul câte unul. Cu o meticulozitate, un spirit și un sarcasm care l-ar fi entuziasmat pe Oscar Wilde, Galilei arată că petele nu erau de fapt deloc întunecate, ci apăreau așa doar în raport cu suprafața strălucitoare a Soarelui. În plus, lucrarea lui Galilei nu lăsa loc de îndoială că petele se aflau chiar pe suprafața Soarelui (mă voi întoarce la demonstrația lui Galilei mai târziu în acest capitol).

Observațiile lui Galilei asupra celorlalte stele au fost cu adevărat primele aventuri umane în partea de cosmos ce se întinde dincolo de sistemul solar. Spre deosebire de ce se întâmpla în cazul Lunii

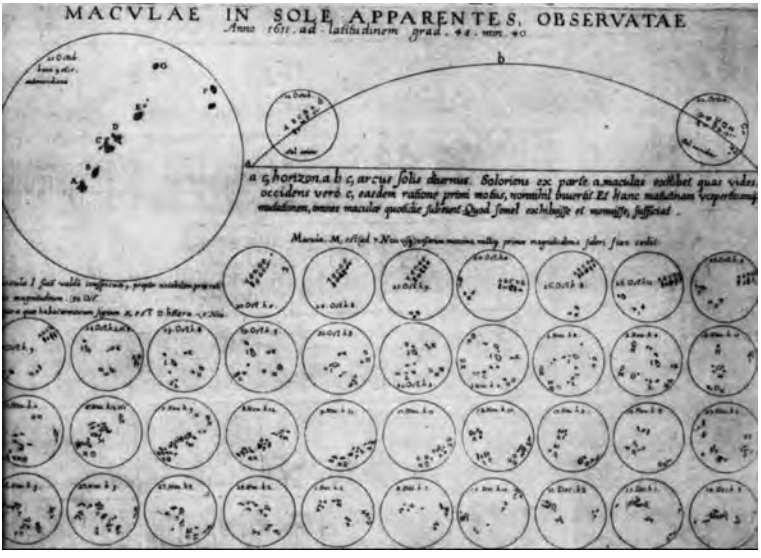

MACVLAE IN SOLE APPARENTES, OBSERVATAE
Anno 1611. ad latitudinem grad. 44. min. 40
b
a c horizon. a b c arcus solis diurnus. Solorum ex parte a maculas exhibet quas vides occidens vero c, eadem ratione primi motus, vnumini buerit. Et hanc mutationem apparentiae maculorum, omnes macular quotidie subeunt. Quod semel exhibuisse et vnumisse, sufficiat.

Figura 18

și al planetelor, Galilei a descoperit că telescopul său nu mărea aproape deloc imaginile stelelor. Concluzia era clară – stelele se aflau mult mai departe decât planetele. Acest fapt constituia o surpriză în sine, dar ceea ce sărea cu adevărat în ochi era *numărul* de noi stele pe care le dezvăluia telescopul. Numai într-o mică regiune din jurul constelației Orion, Galilei a descoperit nu mai puțin de cinci sute de noi stele. Când și-a îndreptat telescopul spre Calea Lactee – fâșia nebuloasă care traversează cerul nopții –, Galilei a fost și mai surprins. Chiar și acea pată luminoasă cu aspect neted s-a prefăcut într-o puzderie de stele pe care nici un om nu le văzuse înainte. Universul a devenit deodată mult mai mare. În limbajul oarecum arid al omului de știință, Galilei spune:

> Ceea ce am observat în al treilea rând este natura materiei Căii Lactee, care, cu ajutorul lunetei, poate fi observată atât de bine, încât toate disputele care i-au frământat pe filozofi timp de multe generații sunt dizolvate de o certitudine vizibilă, și nu mai avem nevoie de argumente terestre. Căci Galaxia nu e decât un amestec de nenumărate stele dispuse în grupuri. În orice direcție ai orienta luneta, un număr imens de stele se înfățișează imediat privirii. Dintre care multe apar destul de mari și foarte vizibile, dar mulțimea celor mici este cu adevărat de necuprins.

Unii dintre contemporanii lui Galilei au reacționat cu entuziasm. Descoperirile lui Galilei au aprins deopotrivă imaginația savanților și a oamenilor de rând, pretutindeni în Europa. Poetul scoțian Thomas Seggett scria dus de val:

> *Columb le-a dat oamenilor pământuri de cucerit prin vărsare de sânge,*
> *Galilei noi lumi ce nu fac rău nimănui.*
> *Ce-i mai bine?*

Sir Henry Wotton, diplomat englez la Veneția, reușește să pună mâna pe un exemplar din *Sidereus nuncius* în ziua în care apare

cartea. O trimite imediat regelui Iacob I al Angliei, însoțită de o scrisoare care spune:

> Trimit Majestății Voastre cea mai stranie noutate (după cum aș putea, pe drept cuvânt, s-o numesc) pe care ați primit-o vreodată din partea de lume în care mă aflu: cartea alăturată (difuzată chiar azi) a profesorului de matematică din Padova care, cu ajutorul unui instrument optic […] a descoperit patru noi planete ce se rotesc în jurul sferei lui Jupiter, împreună cu multe alte stele fixe necunoscute.

Volume întregi se pot scrie (și au fost într-adevăr scrise) despre toate realizările lui Galilei, dar ele nu fac obiectul acestei cărți. Aici vreau doar să examinez efectul unora dintre aceste uimitoare descoperiri asupra felului în care Galilei privea universul. În particular, ce relație găsea el între matematică și vasta desfășurare a cosmosului?

Marea carte a naturii

Filozoful științei Alexandre Koyré (1892–1964) a remarcat odată că revoluția produsă de Galilei în gândirea științifică poate fi redusă la un element esențial: descoperirea că matematica este gramatica științei. În timp ce aristotelicienii se mulțumeau cu o descriere calitativă a naturii, și chiar și pentru aceea apelau la autoritatea lui Aristotel, Galilei credea că savanții trebuie să asculte natura însăși, iar relațiile matematice și modelele geometrice erau cheile pentru descifrarea limbajului universului. Diferențele nete dintre cele două abordări sunt exemplificate de scrierile unor membri proeminenți ai celor două tabere. Aristotelicianul Giorgio Coresio spunea: „Prin urmare, acela care nu vrea să lucreze în întuneric trebuie să apeleze la Aristotel, desăvârșitul interpret al naturii.“ La care alt aristotelician, filozoful Vincenzo di Grazia din Pisa, adăuga:

> Înainte de a lua în considerare demonstrațiile lui Galilei, pare necesar să arătăm cât de departe de adevăr sunt cei care

> doresc să demonstreze fapte naturale cu ajutorul raționamentului matematic, printre care, dacă nu greșesc, se numără Galilei. Toate științele și toate artele au propriile lor principii și cauze, cu ajutorul cărora demonstrează proprietățile particulare ale obiectelor lor. *Rezultă de aici că nu avem voie să folosim principiile unei științe pentru a demonstra proprietățile alteia* [s. m.]. Prin urmare, oricine crede că poate demonstra proprietăți ale naturii cu argumente matematice și-a pierdut pur și simplu mințile, pentru că cele două științe sunt foarte diferite. Savantul care se ocupă de natură studiază corpuri ale naturii a căror stare firească și proprie este cea de mișcare, pe când matematicianul se sustrage oricărei mișcări.

Această idee a unei compartimentări ermetice a ramurilor științei era tocmai genul de idee care-l înfuria pe Galilei. În introducerea la tratatul său de hidrostatică *Discurs despre lucrurile care plutesc sau se mișcă pe apă*, Galilei arată că matematica e un instrument puternic ce le permite oamenilor să dezvăluie secretele naturii:

> Mă aștept la o teribilă mustrare din partea unuia dintre adversarii mei, și aproape că-l pot auzi urlându-mi în urechi că una e să te ocupi de lucruri în chip fizic, și alta în chip matematic, și că geometrii ar trebui să rămână la fanteziile lor și să nu se amestece în probleme filozofice în care concluziile diferă de cele din matematică. De parcă adevărul n-ar fi unul singur; de parcă geometria ar fi, în zilele noastre, un obstacol în dobândirea adevăratei filozofii; de parcă ar fi imposibil să fii geometru și în același timp filozof, așa încât să trebuiască să deducem cu necesitate că cine se pricepe la geometrie nu se poate pricepe la fizică, nu poate emite judecăți despre ea și nu poate trata problemele fizicii în mod fizic! Concluzie nu mai puțin prostească decât cea a unui anume doctor care, orbit de ură, a spus că marele doctor Acquapendente [anatomistul italian Hieronymus Fabricius (1537–1619)], fiind un celebru anatomist și chirurg, ar trebui

să se mulțumească să rămână printre scalpele și alifii, fără a încerca să lecuiască prin medicină, ca și cum priceperea în chirurgie s-ar opune medicinei și ar distruge-o.

Descoperirea petelor solare oferă un exemplu privind felul în care aceste atitudini diferite față de descoperirile prin observație pot altera complet interpretarea fenomenelor naturale. După cum am remarcat mai sus, astronomul iezuit Christopher Scheiner a observat petele cu competență și atenție. A făcut însă greșeala de a lăsa prejudecata aristotelică despre perfecțiunea cerului să-i întunece judecata. Prin urmare, atunci când a descoperit că petele nu se întorceau în aceeași poziție și ordine, s-a grăbit să anunțe că putea „elibera Soarele de ofensa petelor". Premisa caracterului imuabil al cerului, de la care pornise, i-a frânat imaginația și l-a împiedicat să ia în considerare posibilitatea ca petele să se schimbe, devenind chiar de nerecunoscut. A tras deci concluzia că petele *trebuiau* să fie stele care se învârteau în jurul Soarelui. Perspectiva lui Galilei în problema distanței dintre pete și suprafața Soarelui era complet diferită. El identificase trei observații care se cereau explicate: întâi, petele păreau mai subțiri când se aflau aproape de marginea discului solar decât atunci când se aflau aproape de centrul discului. În al doilea rând, distanțele dintre pete păreau să crească pe măsură ce petele se apropiau de centrul discului. În fine, petele păreau să se deplaseze mai repede în apropierea centrului decât în apropierea marginii. Cu o singură construcție geometrică, Galilei a putut demonstra că ipoteza – petele se aflau în contact cu suprafața Soarelui și se deplasau odată cu ea – era în concordanță cu toate observațiile. Explicația sa se baza pe efectul perspectivei pe o sferă – formele apar mai subțiri și mai apropiate între ele către margine (figura 19 înfățișează acest efect pentru cercuri desenate pe o suprafață sferică).

Importanța demonstrației lui Galilei pentru fundamentarea procesului științific a fost uriașă. El a arătat că datele de observație căpătau sens ca descrieri ale realității numai atunci când erau încorporate într-o teorie matematică adecvată. Aceleași observații

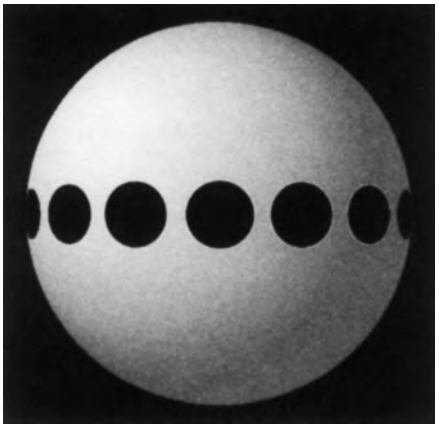


Figura 19

puteau conduce la interpretări ambigue, dacă nu erau înțelese într-un context teoretic mai larg.

Galilei n-a ezitat niciodată să intre în dispută. Cele mai clare expuneri ale ideilor sale privind natura matematicii și rolul acesteia în știință apar într-un alt text polemic – *Il Saggiatore* (*Balanța de maximă precizie*). Acest tratat strălucit cunoaște un asemenea succes încât i se citesc pagini din el Papei Urban al VIII-lea în timpul meselor. Ciudat lucru însă: teza centrală a lui Galilei din *Il Saggiatore* era complet greșită. El a încercat să arate că în realitate cometele sunt fenomene provocate de unele capricii ale refracției optice din regiunea sublunară.

Întreaga poveste a lui *Il Saggiatore* pare extrasă din libretul unei opere italiene. În toamna lui 1618, trei comete apar una după alta. Cea de-a treia rămâne vizibilă timp de aproape trei luni. În 1619, Horatio Grassi, matematician al instituției iezuite Collegio Romano, publică anonim o broșură cu observațiile sale asupra acestor comete. Pe urmele marelui astronom danez Tycho Brahe, Grassi plasează cometele undeva între Lună și Soare. Broșura ar fi putut trece neobservată, dar Galilei se hotărăște să riposteze, pentru că i se spusese că unii iezuiți priveau cartea lui Grassi ca pe o lovitură

dată teoriei copernicane. Răspunsul său a luat forma unor conferințe (scrise în mare parte de Galilei însuși) ținute de Mario Guiducci, discipol al lui Galilei. În versiunea publicată a acestor conferințe, *Discurs despre comete*, Galilei îi atacă direct pe Grassi și Tycho Brahe. De data asta era rândul lui Grassi să se simtă jignit. Sub pseudonimul Lothario Sarsi, și dându-se drept unul dintre propriii săi studenți, Grassi a publicat un răspuns caustic, criticându-l pe Galilei în termeni duri (răspunsul era intitulat *Balanța astronomică și filozofică cu care sunt cântărite părerile lui Galileo Galilei despre comete, precum și cele prezentate la Academia din Florența de Mario Guiducci*). Apărându-se că a aplicat metoda lui Tycho Brahe de determinare a distanțelor, Grassi (exprimându-se ca și cum ar fi fost propriul său student) spune:

> Să acceptăm că maestrul meu l-a urmat pe Tycho. E asta o crimă? Pe cine altcineva ar fi trebuit să urmeze? Pe Ptolemeu [creatorul sistemului geocentric]? Adepții lui își văd beregata amenințată de sabia lui Marte. Pe Copernic? Dar cine este cu adevărat credincios îi va goni pe toți din preajma lui, va disprețui și va respinge ipoteza sa de curând condamnată. Prin urmare, Tycho rămâne singurul pe care îl putem accepta drept călăuză pe cărările necunoscute ale stelelor.

Acest text arată că matematicienii iezuiții se aflau pe muchie de cuțit la începutul secolului XVII. Pe de-o parte, critica lui Grassi la adresa lui Galilei era perfect întemeiată și foarte pătrunzătoare. Pe de altă parte, fiind obligat să respingă teoria lui Copernic, Grassi își autoimpune o cămașă de forță care îi alterează judecata.

Prietenii lui Galilei sunt atât de îngrijorați că atacul lui Grassi avea să submineze autoritatea lui Galilei, încât îl somează pe maestru să răspundă. Astfel s-a ajuns la publicarea lui *Il Saggiatore* în 1623 (titlul complet spunea că în acel document „sunt cântărite cu o balanță fină și precisă cele cuprinse în *Balanța astronomică și filozofică* de Lotahario Sarsi Sigensano“).

După cum am remarcat înainte, *Il Saggiatore* conține afirmația cea mai clară și mai tranșantă a lui Galilei privind matematica și cosmosul. Iată remarcabilul text:

> Cred că Sarsi este ferm convins că în filozofie e esențial să te sprijini pe părerea vreunui autor celebru, ca și cum atunci când mințile noastre nu sunt legate de gândirea altcuiva ele sunt osândite să rămână seci și sterile. Poate își închipuie că filozofia este o carte de literatură născocită de vreun om, ca *Iliada* sau *Orlando furioso* [poem epic din secolul XVI, scris de Ludovico Ariosto] – cărți în care cel mai puțin important lucru este dacă ceea ce stă scris în ele e adevărat. Domnule Sarsi, nu așa stau lucrurile. *Filozofia e scrisă în marea carte pe care o aveți mereu în fața ochilor (vreau să spun universul), dar pe care n-o putem înțelege dacă nu învățăm întâi limba și nu descifrăm caracterele în care e scrisă. Ea este scrisă în limba matematicii, iar caracterele sunt triunghiurile, cercurile și alte figuri geometrice, fără de care este omenește imposibil să înțelegem un singur cuvânt din ea, și fără de care rătăcim zadarnic într-un labirint întunecat.* [s. m.]

Uimitor, nu-i așa? Cu secole înainte de a se pune întrebarea de ce este matematica atât de eficientă în explicarea naturii, Galilei credea că deține deja răspunsul! Pentru el, matematica era pur și simplu limba universului. Pentru a înțelege universul, susținea el, trebuie să-i cunoaștem limba. Dumnezeu este într-adevăr matematician.

Întregul spectru al ideilor din scrierile lui Galilei compune un tablou și mai amănunțit al felului în care vedea el matematica. Întâi, trebuie să înțelegem că pentru Galilei matematica însemna în fond geometrie. A fost rareori interesat să măsoare valori în numere absolute. A descris fenomenele mai ales prin raporturi între cantități și în termeni relativi. În această privință, Galilei era iarăși un veritabil discipol al lui Arhimede – a folosit din plin principiul pârghiei și metoda geometriei comparate. O a doua idee interesantă, revelată în special de ultima sa carte, este distincția pe care

Galilei o face între rolul geometriei şi cel al logicii. Această carte, *Discursuri şi demonstraţii matematice cu referire la două noi ştiinţe*, e scrisă sub forma unor discuţii însufleţite între trei interlocutori, Salviati, Sagredo şi Simplicio, ale căror roluri sunt bine definite. Salviati este purtătorul de cuvânt al lui Galilei. Sagredi, aristocratul iubitor de filozofie, este un om care s-a dabarasat deja de iluziile judecăţii comune aristotelice şi poate fi deci convins de forţa noii ştiinţe matematice. Simplicio, care în operele precedente ale lui Galilei era vrăjit de autoritatea aristotelică, apare aici ca un elev cu mintea deschisă. În cea de-a doua zi a dezbaterii, Sagredo poartă un dialog interesant cu Simplicio:

> Sagredo: Ce-am putea spune, Simplicio? Nu trebuie oare să recunoaştem că puterea geometriei este dintre toate instrumentele cel mai nimerit pentru a ascuţi mintea şi a o pregăti să judece desăvârşit şi să facă speculaţii? N-a avut oare Platon motive întemeiate să vrea ca elevii săi să studieze înainte de toate matematica?

Simplicio pare să fie de acord şi aduce în discuţie comparaţia cu logica:

> Simplicio: Încep într-adevăr să înţeleg că, deşi logica e un minunat instrument de îndrumare a judecăţii, nu se compară cu ascuţimea geometriei în trezirea minţii către descoperire.

Sagredo adânceşte apoi această distincţie:

> Sagredo: Mi se pare că logica ne învaţă cum să aflăm dacă raţionamentul şi demonstraţiile deja descoperite sunt concludente sau nu, dar nu cred că ne învaţă cum să găsim raţionamentul şi demonstraţiile concludente.

Mesajul lui Galilei e simplu – credea că geometria e instrumentul cu ajutorul căruia *se descoperă* noi adevăruri. Pe de altă parte, logica era pentru el mijlocul de *a evalua şi judeca* descoperirile deja făcute. În capitolul 7 vom examina o perspectivă diferită, potrivit căreia întreaga matematică provine din logică.

Cum a ajuns Galilei la ideea că matematica e limbajul naturii? La urma urmelor, o concluzie filozofică de asemenea anvergură nu putea să apară din senin. Într-adevăr, rădăcinile acestei concepții pot fi găsite la Arhimede. Maestrul grec a fost primul care a folosit matematica pentru a explica fenomenele naturale. Apoi, pe o cale întortocheată trecând prin câțiva socotitori medievali și matematicieni de curte italieni, natura matematicii a dobândit statutul de subiect demn de discuție. Până la urmă, unii dintre matematicienii iezuiți de pe vremea lui Galilei, în particular Christopher Clavius, au recunoscut și ei faptul că matematica putea ocupa un loc între metafizică – principiile filozofice ale naturii ființei – și realitatea fizică. În prefața („Prolegomena“) la *Comentarii asupra „Elementelor“ lui Euclid*, Clavius scrie:

> Din moment ce disciplinele matematice se ocupă cu lucruri considerate dezlegate de orice materie sensibilă, deși sunt cufundate în lucrurile materiale, este limpede că ele dețin un loc intermediar între metafizică și științele naturii, dacă luăm în considerare obiectele acestora.

Galilei nu a fost mulțumit cu ideea că matematica e doar un mijlocitor sau un transmițător. A făcut mai departe pasul îndrăzneț de a considera matematica drept limbă maternă a naturii. Această identificare a ridicat însă o altă problemă serioasă – una ce avea să aibă consecințe dramatice asupra vieții lui Galilei.

Știința și teologia

Potrivit lui Galilei, Dumnezeu concepuse natura folosind limbajul matematicii. Potrivit Bisericii Catolice, Dumnezeu era „autorul“ Bibliei. Ce trebuia făcut în cazurile în care explicațiile științifice bazate pe matematică păreau să contrazică Scripturile? Teologii Conciliului de la Trento din 1546 au răspuns în termeni fără echivoc: „Nimeni, întemeindu-se pe propria judecată și deformând Sfintele Scripturi potrivit ideilor sale, nu va îndrăzni să le interpreteze în

sens contrar celui dat de Sfânta Biserică, singura îndreptățită să judece adevăratul lor sens şi înțeles.“ În conformitate cu această afirmație, în 1616, când teologilor li s-a cerut să-și exprime părerea despre cosmologia heliocentrică a lui Copernic, aceştia au conchis că era „eretică în mod oficial, căci contrazicea explicit, în multe locuri, sensul Sfintei Scripturi“. Cu alte cuvinte, fondul obiecției Bisericii față de adeziunea lui Galilei la teoria lui Copernic era sfidarea autorității Bisericii în interpretarea scripturilor, şi nu atât înlăturarea Pământului din poziția sa centrală în cosmos. Într-un climat în care Biserica Catolică se simțea deja hărțuită de teologii Reformei, Galilei şi Biserica intrau în contradicție directă.

Evenimentele s-au precipitat spre sfârşitul lui 1613. Benedetto Castelli, fost student al lui Galilei, face o prezentare a noilor descoperiri astronomice în fața marelui duce al Toscanei şi a anturajului său. După cum era de bănuit, e obligat să explice evidentele discrepanțe dintre cosmologia copernicană şi unele relatări biblice, de pildă cea în care Dumnezeu opreşte în loc Soarele şi Luna pentru a le permite lui Iosua şi evreilor să-şi încheie victoria asupra amoriților în valea Aialon. Deşi Castelli spune că s-a „purtat ca un campion“ în apărarea teoriei lui Copernic, Galilei e oarecum descumpănit de această confruntare şi se simte obligat să-şi exprime propriile vederi privind contradicția dintre ştiință şi Sfintele Scripturi. Într-o lungă scrisoare către Castelli, datată 21 decembrie 1613, Galilei scrie:

> […] pentru a fi pe înțelesul mulțimii, Scriptura a socotit potrivit să spună multe lucruri, în aparență şi după semnificația literală, diferite de adevărul absolut, în vreme ce natura este inexorabilă şi de neschimbat, şi deloc preocupată dacă acțiunile şi procedeele sale tainice sunt sau nu accesibile înțelegerii oamenilor (drept care ea nu încalcă niciodată legile ce-i sunt trasate); de aceea, aş zice că acele fenomene naturale, pe care ni le pune înaintea ochilor experiența sensibilă sau ni le confirmă demonstrațiile necesare, nu trebuie cu nici un chip puse la îndoială pentru că anumite pasaje din Scriptură par să ne spună în cuvinte altceva: căci nici una

> din afirmațiile Scripturii nu este supusă unor restricții atât de severe cum sunt supuse toate fenomenele naturii.*

Această interpretare a semnificației biblice intra evident în contradicție fățișă cu interpretarea unora dintre teologii mai stricți. De pildă, dominicanul Domingo Bañez scria în 1584: „Sfântul Duh nu numai că a inspirat tot ce stă scris în Scriptură, dar a și dictat și impus fiecare cuvânt scris.“ Evident, Galilei nu era convins. În *Scrisoarea către Castelli* adaugă:

> Eu aș crede că autoritatea Sfintei Scripturi a avut drept unic țel să-i convingă pe oameni de acele precepte și afirmații care, fiind indispensabile mântuirii lor și mai presus de înțelegerea omenească, nu puteau deveni credință prin nici o altă învățătură și pe nici o altă cale decât doar prin glasul Sfântului Duh însuși. Dar că același Dumnezeu care ne-a înzestrat cu simțuri, cu rațiune și cu intelect a vrut – neluând în seamă folosirea acestor daruri – să ne dea pe altă cale cunoștințele pe care le putem obține prin ele, nu cred că e necesar să credem, și cu atât mai puțin e de crezut un asemenea lucru în științele despre care Scriptura vorbește foarte puțin și doar prin afirmații disparate; or tocmai acesta e cazul astronomiei, despre care se pomenește atât de puțin, încât nici măcar nu sunt amintite planetele.

O copie a scrisorii lui Galilei ajunge la Congregația Sfântului Oficiu din Roma, unde erau de obicei judecate problemele legate de credință, și mai ales ajunge la influentul cardinal Roberto Bellarmino (1542–1621). Reacția inițială a lui Bellarmino față de teoria copernicană fusese mai curând moderată, căci privise întregul model heliocentric ca pe „o cale de a salva aparențele, la fel cum procedaseră cei care propuseseră epicicluri, dar nu credeau cu adevărat în existența lor“. Ca și alții înaintea sa, Bellarmino credea că modelele matematice propuse de astronomi sunt doar niște născociri

---

* Acest fragment și următorul: Galileo Galilei, *Scrisori copernicane*, Editura Humanitas, București, 2010. (*N. t.*)

convenabile, menite să descrie ce observau oamenii, fără a fi ancorate în realitatea fizică. Asemenea stratageme de „salvare a aparențelor", susținea el, nu demonstrează că Pământul se mișcă într-adevăr. Prin urmare, Bellarmino n-a văzut o amenințare imediată venind din partea cărții lui Copernic (*De Revolutionibus*), deși a adaugat imediat că a pretinde că Pământul se mișca avea nu numai să-i „irite pe toți învățații filozofi și teologi", ci avea și să „dăuneze Sfintei Credințe făcând ca Sfânta Scriptură să treacă drept falsă".

Amănuntele acestei tragice povești nu fac obiectul cărții de față, așa că nu le voi prezenta aici decât pe scurt. Congregația Indexului cărților interzise* a proscris cartea lui Copernic în 1616. Încercările ulterioare ale lui Galilei de a face apel la numeroase pasaje din cel mai respectat teolog antic – Sf. Augustin – pentru a-și justifica interpretarea relației dintre științele naturii și Scriptură nu i-au atras prea multă simpatie. În pofida scrisorilor limpezi în care principala sa teză era aceea că nu există dezacord (altul decât unul superficial) între teoria copernicană și textele biblice, teologii vremii au privit argumentele lui Galilei ca pe o incursiune nepoftită în teritoriul lor. Aceiași teologi nu ezitau însă să-și dea cu părerea în chestiuni științifice.

Pe măsură ce nori negri se adunau la orizont, Galilei continua să creadă că rațiunea avea să precumpănească – greșeală uriașă când e vorba să pui credința la încercare. Galilei publică *Dialog despre cele două mari sisteme ale lumii* în februarie 1632 (figura 20 înfățișează frontispiciul primei ediții). Acest text polemic constituie cea mai amănunțită expunere pe care Galilei o face ideilor copernicane. Mai mult, Galilei susține că, urmând știința ce folosește limbajul echilibrului mecanic și al matematicii, oamenii pot înțelege spiritul divin. Altfel spus, atunci când cineva găsește soluția unei probleme folosind proporțiile geometrice, înțelegerea la care

---

* *Index librorum prohibitorum* sau *Index expurgatorius*, publicat prima dată în 1559 de Papa Paul IV la cererea Inchiziției, era o listă de cărți interzise, fiind socotite de Biserica Catolică imorale și contrare credinței. Indexul a ieșit din uz în 1966. (*N. t.*)

ajunge e dumnezeiască. Reacția Bisericii e promptă și decisivă. Difuzarea *Dialogului* e interzisă în luna august a anului publicării sale. În luna următoare, Galilei este chemat la judecată la Roma pentru a se apăra de acuzațiile de erezie. Galilei e adus la judecată pe 12 aprilie 1633 și găsit „suspect de erezie" pe 22 iunie 1633. Judecătorul îl acuză pe Galilei „de a fi crezut și susținut doctrina – care e falsă și contrară sfintelor și dumnezeieștilor Scripturi – potrivit căreia Soarele este centrul lumii și nu se mișcă de la est la vest, iar Pământul se mișcă și nu este centrul lumii". Sentința e aspră:

> Te condamnăm la închisoarea oficială a acestui Sfânt Oficiu pe o durată ce urmează să fie stabilită de noi și, în chip de penitență, îți poruncim ca timp de trei ani de-acum înainte să repeți o dată pe săptămână cei șapte Psalmi de pocăință. Rămâne la latitudinea noastră să îndulcim, să comutăm sau să ridicăm, total ori parțial, pedeapsa și penitența pomenite mai sus.

Distrus, Galilei, în vârstă de șaptezeci de ani, nu poate rezista presiunii. Cu sufletul frânt, Galilei adresează o scrisoare de abjurare, în care se angajează să „abandoneze complet falsa opinie potrivit căreia Soarele este în centrul lumii și nu se mișcă, iar Pământul nu este centrul lumii și se mișcă". El încheie astfel:

> Prin urmare, dorind să înlătur din mințile Eminențelor voastre, și din cele ale tuturor creștinilor credincioși, teribila bănuială ce planează asupra mea, cu inima sinceră și neprefăcută credință abjur, blestem și detest erorile și ereziile menționate și, în general, toate celelalte erori, erezii și secte contrare Sfintei Biserici, și jur ca în viitor să nu mai spun sau afirm vreodată, verbal sau în scris, nimic care ar putea da naștere unei bănuieli asemănătoare în ce mă privește.

Ultima carte a lui Galilei, *Discursuri și demonstrații matematice cu referire la două noi științe*, a fost publicată în 1638. Manuscrisul a fost strecurat în afara Italiei și publicat la Leiden, în Olanda.

Figura 20

Conținutul acestei cărți exprima cu adevărat și cu tărie sentimentul conținut în legendarele cuvinte „*Eppur si muove*“ („Și totuși se mișcă“). Sfidătoarea frază, atribuită lui Galilei la sfârșitul judecării sale, n-a fost probabil pronunțată niciodată.

Pe 31 octombrie 1992, Biserica Catolică a decis în cele din urmă să-l „reabiliteze“ pe Galilei. Recunoscând că Galilei avusese tot timpul dreptate, dar evitând mai departe o critică directă a Inchiziției, Papa Ioan Paul al II-lea a spus:

> Paradoxal, Galilei, sincer credincios, s-a dovedit mai perspicace în această temă [aparenta discrepanță dintre știință și Scriptură] decât adversarii săi teologi. Majoritatea teologilor nu au perceput distincția formală care există între Scriptura în sine și interpretarea sa, iar acest lucru i-a făcut să transfere pe nedrept pe tărâmul doctrinei religioase o temă care ține de fapt de cercetarea științifică.

Ziarele din lumea întreagă s-au distrat pe cinste. *Los Angeles Times* a declarat: „Este oficial: Pământul se rotește în jurul Soarelui, chiar și pentru Vatican.“

Mulți însă nu s-au amuzat. Unii au considerat că această *mea culpa* a Bisericii era prea puțin și venea prea târziu. Specialistul spaniol în Galilei Antonio Beltrán Marí observa:

> Faptul că Papa se consideră o autoritate capabilă să spună ceva relevant despre Galilei și știința acestuia arată că, din perspectiva Papei, nu s-a schimbat nimic. Se poartă exact la fel ca judecătorii lui Galilei, a căror greșeală o recunoaște acum.

Ca să fim drepți, Papa s-a aflat într-o situație în care nu putea câștiga. Orice hotărâre ar fi luat – fie că ignora problema și menținea condamnarea lui Galilei, fie că recunoștea greșeala Bisericii – ar fi fost probabil criticat. Totuși, într-o epocă în care se fac încercări de a introduce creaționismul biblic ca teorie „științifică“ alternativă (sub titlul ușor voalat de „proiect inteligent“)*, e bine să ne amintim că Galilei a purtat deja această bătălie acum aproape patru sute de ani – și a câștigat!

---

* Pentru problema „creaționismului științific“ vezi, de pildă, Michael Shermer, *De ce cred oamenii în bazaconii*, Editura Humanitas, București, 2009. (*N. t.*)

Capitolul 4

Magicienii: Scepticul și uriașul

Într-unul dintre cele șapte scheciuri din filmul *Tot ce ați vrut să știți despre sex, dar nu ați avut curaj să întrebați*, Woody Allen joacă rolul unui bufon care se ține de comicării la o curte medievală, spre amuzamentul regelui și al anturajului său. Bufonul tânjește după regină, așa că îi dă acesteia un afrodiziac, sperând s-o seducă. Regina e atrasă de bufon, dar vai, poartă un lacăt uriaș la centura de castitate. Confruntat cu această situație frustrantă în dormitorul reginei, bufonul spune nervos: „Trebuie să găsesc rapid o soluție, înainte ca Renașterea să ajungă aici și să pictăm *cu toții*."

Lăsând gluma deoparte, această exagerare spune mult despre Europa secolelor XV și XVI. Renașterea a produs într-adevăr o asemenea bogăție de capodopere în pictură, sculptură și arhitectură, încât și în ziua de azi aceste uimitoare opere de artă constituie o parte importantă a culturii noastre. În știință, Renașterea a fost martora revoluției heliocentrice din astronomie, înfăptuită de Copernic, Kepler și, mai ales, Galilei. Noua viziune asupra universului, posibilă grație observațiilor făcute de Galilei cu telescopul, și descoperirile rezultate din experiențele sale de mecanică au stat la baza succeselor matematice din secolul următor. Odată cu primele semne de prăbușire a filozofiei aristotelice și cu contestarea ideologiei teologice a Bisericii, filozofii au început să caute o nouă temelie pe care să înalțe cunoașterea umană. Matematica, având un corp de cunoștințe în mod evident certe, oferea ceea ce părea a fi cea mai solidă bază pentru un nou început.

Cel care a preluat ambițioasa sarcină de a descoperi o formulă care să disciplineze cumva întreaga gândire rațională și să unifice întreaga cunoaștere, știința și etica a fost tânărul ofițer și gentilom francez René Descartes.

Un visător

Mulți consideră că Descartes (figura 21) a fost deopotrivă primul mare filozof modern și primul biolog modern. Dacă adăugăm acestor impresionante recomandări faptul că filozoful empirist englez John Stuart Mill (1806–1873) a spus despre una dintre realizările matematice ale lui Descartes că este „cel mai măreț pas făcut vreodată în progresul științelor exacte", începem să ne dăm seama de imensa forță intelectuală a lui Descartes.

René Descartes s-a născut pe 31 martie 1596 în comuna La Haye, în Franța. În cinstea celui mai celebru locuitor al său, comuna a fost rebotezată La Haye-Descartes în 1801, iar din 1967 se numește Descartes. La opt ani, Descartes intră la colegiul iezuit din La Flèche, unde studiază până în 1612 latina, matematica, limbile și literaturile clasice, știința și filozofia scolastică. Din pricina sănătății sale relativ fragile, Descartes e scutit de trezitul brutal la cinci dimineața, și i se dă voie să-și petreacă dimineața în pat. A continuat și la maturitate să folosească prima parte a zilei pentru contemplație, și i-a spus odată matematicianului francez Blaise Pascal că, pentru el, singura cale de a rămâne sănătos și eficient era să nu se scoale niciodată până nu simte că o poate face fără să-l indispună. După cum vom vedea curând, această afirmație s-a dovedit a fi o profeție tragică.

După La Flèche, Descartes a absolvit Universitatea din Poitiers devenind avocat, dar n-a practicat de fapt niciodată dreptul. Neastâmpărat și curios să vadă lumea, Descartes se hotărăște să se alăture armatei Principelui Mauriciu de Orania, care staționa pe atunci la Breda în Provinciile Unite (Țările de Jos). O întâlnire întâmplătoare în Breda avea să devină foarte importantă pentru

Figura 21

dezvoltarea intelectuală a lui Descartes. Potrivit poveștii care s-a perpetuat, pe când hoinărea pe străzi, Descartes vede brusc o tablă ce părea să prezinte o problemă grea de matematică. Descartes îl oprește pe primul trecător pentru a-i traduce textul din olandeză în latină sau franceză. Câteva ore mai târziu, Descartes reușește să rezolve problema, convingându-se astfel că avea într-adevăr talent pentru matematică. Traducătorul se dovedește a fi nimeni altul decât matematicianul și omul de știință olandez Isaac Beeckman (1588–1637), a cărui influență asupra studiilor lui Descartes în domeniul fizicii și al matematicii a continuat ani de zile. În următorii nouă ani, Descartes oscilează între agitația pariziană și serviciul militar în câteva armate. Într-o Europă pradă luptelor religioase și politice și începutului Războiului de Treizeci de Ani, este relativ ușor pentru Descartes să găsească bătălii sau batalioane în marș cărora să li se alăture, fie la Praga, fie în Germania, fie în Transilvania. De-a lungul acestei perioade continuă însă, după propriile-i spuse, „să fie cufundat până peste cap în studiul matematicii“.

Pe 10 noiembrie 1619, Descartes are trei vise care nu numai că aveau să aibă un efect zguduitor asupra restului vieții sale, dar marchează, poate, începutul lumii moderne. Povestind mai târziu acest eveniment, Descartes spune într-una dintre notele sale: „Eram plin de entuziasm și am descoperit fundamentele unei științe minunate.“ Despre ce era vorba în aceste vise marcante?

De fapt, două fuseseră coșmaruri. În primul vis, Descartes este prins într-un vârtej de vânt care îl face să se răsucească violent pe călcâiul stâng. Este de asemenea îngrozit de o senzație continuă de cădere la fiecare pas. Apare un bătrân care încearcă să-i arate un pepene dintr-o țară străină. Al doilea vis e o altă viziune înspăimântătoare: este prizonier într-o încăpere în care se aud tunete și în toate direcțiile zboară scântei rău prevestitoare. În perfectă opoziție cu primele două, cel de-al treilea vis e imaginea însăși a calmului și meditației. Pe măsură ce ochii săi se plimbă prin încăpere, Descartes vede cărți apărând și dispărând pe o masă. Printre ele se afla o antologie de poezii intitulată *Corpus poetarum* și o enciclopedie. Deschide antologia la întâmplare și ochii îi cad pe primul vers al unei poezii aparținând poetului roman din secolul IV Ausonius. Scria așa: „*Quod vitae sectabor iter*?“ („Ce drum ar trebui să apuc în viață?“) În mod miraculos, apare din văzduh un bărbat care citează alt vers: „*Est et non*“ („Da și nu“ sau „Este și nu este“). Descartes vrea să-i arate versul lui Ausonius, dar întreaga viziune dispare în neant.

Cum se întâmplă de obicei cu visele, semnificația lor nu rezidă atât în conținutul propriu-zis, care este adesea bizar și greu de înțeles, cât în interpretarea pe care visătorul alege să i-o dea. În cazul lui Descartes, efectul acestor trei vise enigmatice a fost uimitor. El a atribuit enciclopediei înțelesul cunoașterii științifice colective, iar antologiei de poezie pe acela de a întruchipa filozofia, revelația și entuziasmul. Prin „Da și nu“ – faimoasele contrarii ale lui Pitagora – a înțeles reprezentarea adevărului și a falsului. (Deloc surprinzător, unele interpretări psihanalitice au sugerat conotații sexuale legate de pepene.) Descartes era absolut convins că visele îl îndrumau în direcția unificării cunoașterii umane prin

mijloacele rațiunii. Și-a dat demisia din armată în 1621, dar a continuat să călătorească și să studieze matematica în următorii cinci ani. Toți cei care l-au întâlnit pe Descartes în acea vreme, inclusiv influentul cardinal Pierre de Bérule (1575–1629), au fost adânc impresionați de pătrunderea și limpezimea gândirii sale. Mulți l-au încurajat să-și publice ideile. Cu orice alt tânăr, asemenea înțelepte sfaturi părintești puteau avea același efect contrar ca sfatul într-un singur cuvânt în privința carierei, „Plasticul!“, asupra personajului Dustin Hoffman din filmul *Absolventul*, dar Descartes era altfel.

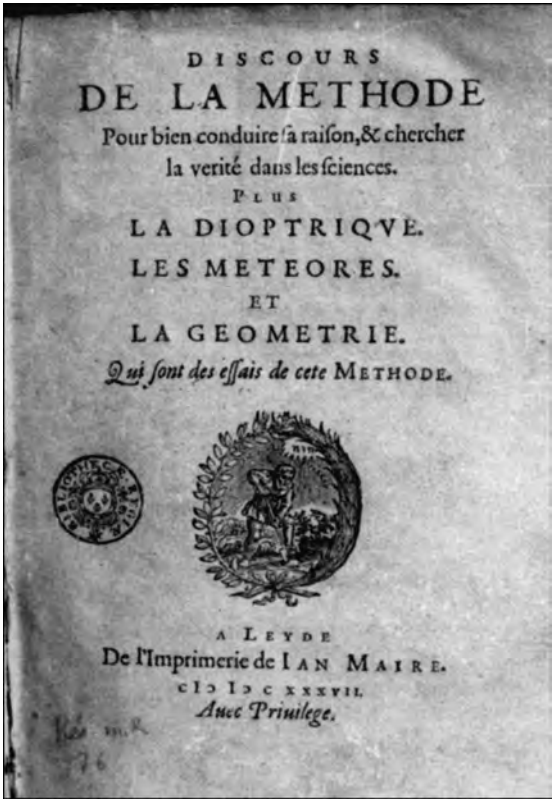

DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon,& chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ c xxxvii.
Auec Priuilege.

Figura 22

Fiind deja dedicat căutării adevărului, era ușor de convins. S-a mutat în Olanda, care părea să ofere, la acea vreme, o atmosferă intelectuală mai liniștită, iar următorii douăzeci de ani sunt excepțional de rodnici.

Descartes își publică prima capodoperă privind bazele științei, *Discurs despre metodă*, în 1637 (figura 22 înfățișează frontispiciul primei ediții). Trei anexe – despre optică, meteorologie și geometrie – însoțesc acest tratat. Urmează în 1641 o operă filozofică, *Meditații metafizice*, iar, în 1644, una de fizică, *Principiile filozofiei*. Pe atunci, Descartes era deja faimos în toată Europa, printre admiratorii și corespondenții săi numărându-se principesa Elisabeta a Boemiei (1618–1680), aflată în exil. În 1649, Descartes e invitat s-o instruiască în domeniul filozofiei pe încântătoarea regină Cristina a Suediei (1626–1689). Având dintotdeauna o slăbiciune pentru capetele încoronate, Descartes acceptă. De fapt, scrisoarea sa către regină era atât de încărcată de expresiile venerației curtenitoare din secolul XVII, încât astăzi sună pur și simplu ridicol: „Îndrăznesc să afirm aici că Majestatea Voastră nu-mi poate porunci nici un lucru atât de anevoios încât să nu fiu gata să fac tot ce este cu putință pentru a-l înfăptui, și că, chiar de m-aș fi născut suedez ori finlandez, n-aș fi dovedit mai mult zel și n-aș fi fost mai potrivit [pentru Majestatea Voastră] decât sunt.“ Regina cu voință de fier, în vârstă de douăzeci și trei de ani, insistă ca Descartes să-i dea lecții la diabolica oră cinci dimineața. Într-o țară atât de rece, încât chiar și gândurile înghețau, după cum îi scrie Descartes unui prieten, această împrejurare se dovedește fatală. „Sunt în afara elementului meu aici“, scrie Descartes, „și nu-mi doresc decât liniște și odihnă, bunuri pe care nici cei mai puternici regi de pe pământ nu le pot acorda celor ce nu pot să le obțină pentru ei înșiși“. După numai câteva luni de înfruntare a asprei ierni suedeze la acele ore întunecate ale dimineții pe care reușise să le evite toată viața, Descartes se îmbolnăvește de pneumonie. Moare la cincizeci și trei de ani, pe 11 februarie 1650, la ora patru dimineața, ca și cum ar fi încercat să evite o altă chemare la trezire. Cel a cărui operă

anunța epoca modernă cade victimă propriilor sale aplecări spre snobism și capriciilor unei tinere regine.

Descartes a fost înmormântat în Suedia, dar rămășițele sale, sau o parte dintre ele, au fost aduse în Franța în 1667. Acolo, rămășițele au fost mutate de multe ori, până când au fost îngropate într-una din capelele catedralei Saint-Germain-des-Prés pe 26 februarie 1819. Figura 23 mă înfățișează lângă placa neagră, simplă care îl comemorează pe Descartes. Un craniu pretins a fi al lui Descartes a trecut din mână în mână în Suedia până când a fost cumpărat de un chimist pe nume Berzelius, care l-a adus în Franța. Craniul se află acum la Muzeul Științelor Naturale, care face parte din Muzeul Omului de la Paris. Craniul este adesea expus față în față cu craniul unui om de Neanderthal.

Figura 23

Un modern

Eticheta de „modern“ aplicată unui om îi desemnează de regulă pe aceia care pot conversa firesc cu colegii lor de breaslă din secolul XX (sau, acum, XXI). Ceea ce-l face pe Descartes cu adevărat modern este faptul că a îndrăznit *să pună la îndoială* toate afirmațiile filozofice și științifice dinaintea sa. El a spus odată că educația i-a servit doar pentru a-i stârni perplexitatea și a-l face conștient de ignoranța sa. În celebrul său *Discurs despre metodă*, scrie: „[…] filozofia a fost cultivată de spiritele cele mai alese ale secolelor trecute și totuși […] nu există vreun lucru care să nu fie subiect de dispută, și, în consecință, să fie indubitabil […].“* Dacă soarta multora dintre ideile filozofice ale lui Descartes nu avea să fie prea diferită, căci neajunsuri importante ale afirmațiilor sale au fost subliniate de filozofii care i-au urmat, scepticismul său mereu viu față de chiar cele mai simple concepte îl face cu siguranță modern până în măduva oaselor. Și, mai important din perspectiva cărții de față, Descartes a recunoscut că metodele și procesul raționamentului din matematică duc tocmai la acel tip de *certitudine* care le lipsea filozofilor scolastici dinaintea lui. S-a exprimat limpede:

> Aceste lungi șiruri de explicații foarte simple și la îndemână, de care geometrii obișnuiesc să se slujească pentru a reuși în demonstrațiile lor cele mai dificile, mi-au oferit prilejul să-mi închipui *că toate lucrurile ce intră în sfera cunoașterii umane se înlănțuie în același fel* [s. m.], cu condiția de a nu considera drept adevărat ceva ce nu este și de a păstra întotdeauna ordinea de deducere a unora din altele; în consecință, nu pot exista lucruri oricât de îndepărtate la care să nu ajungem și oricât de ascunse pe care să nu le descoperim.

---

* Pentru acest citat și pentru următoarele: Descartes, *Discurs despre metodă*, Editura Academiei, București, 1990. (*N. t.*)

Această afirmație îndrăzneață merge, într-un fel, chiar dincolo de ideile lui Galilei. Nu numai universul fizic e scris în limbaj matematic, ci întreaga cunoaștere omenească urmează logica matematicii: „[…] socotesc [metoda matematicii] mai de preț decât orice altă cunoștință transmisă nouă pe căi omenești, deoarece ea e izvorul tuturor cunoștințelor, după câte îmi dau seama.“* Prin urmare, unul dintre scopurile lui Descartes a devenit demonstrarea faptului că lumea fizică – pentru el, o realitate ce putea fi descrisă matematic – putea fi reprezentată fără a fi nevoie să ne sprijinim pe vreuna dintre adesea înșelătoarele noastre percepții senzoriale. El susținea că mintea trebuie să filtreze ceea ce ochii văd și să transforme percepțiile în idei. La urma urmelor, spune Descartes, „nu pot deosebi niciodată prin semne sigure veghea de somn“. Dar, se întreabă Descartes, dacă tot ce percepem ca realitate e de fapt doar un vis, cum putem ști dacă însuși Pământul și cerul nu sunt decât „înșelări ale somnului“ așezate în simțurile noastre de vreun „geniu rău […] deosebit de puternic și iscusit“? Sau, după cum spunea Woody Allen: „Și dacă totul nu-i decât o iluzie și nimic nu există? În cazul ăsta, e clar că am dat prea mulți bani pe covor.“

Pentru Descartes, acest potop de îndoieli tulburătoare a produs până la urmă ceea ce avea să devină cea mai memorabilă afirmație a sa: *cogito ergo sum* (gândesc, deci exist). Cu alte cuvinte, în spatele gândurilor trebuie să se afle un spirit conștient. Paradoxal, faptul de a te îndoi nu poate fi pus el însuși la îndoială! Descartes a încercat să folosească acest aparent firav început pentru a construi un plan complet al cunoașterii sigure. Și-a încercat puterile în filozofie, optică, mecanică, medicină, embriologie și meteorologie, și a avut realizări de oarecare importanță în toate aceste discipline. Cu toate acestea, în pofida insistenței sale privind capacitatea umană de a raționa, Descartes nu credea că logica singură putea dezvălui adevărurile fundamentale. Ajungând, în esență, la aceleași concluzii ca și Galilei, observă: „[…] în ce privește logica,

* Descartes, *Reguli de îndrumare a minții. Meditații despre filozofia primă*, Editura Humanitas, București, 2004. (*N. t.*)

silogismele și majoritatea celorlalte reguli ale sale servesc mai degrabă la a explica lucruri care se ştiu […] decât la a le învăța“. În schimb, prin eroica sa întreprindere de a reinventa sau stabili fundamentele unor întregi discipline, Descartes a încercat să folosească principiile pe care le distilase din metoda matematică pentru a se asigura că se afla pe un teren ferm. A prezentat aceste instrucțiuni riguroase în *Reguli de îndrumare a minții*. El a început cu adevăruri de care nu se îndoia (asemănătoare axiomelor din geometria euclidiană); a încercat să descompună problemele dificile în unele cu care se opera mai uşor; a pornit de la simplu pentru a ajunge la complicat; a verificat încă o dată întregul procedeu pentru a se asigura că nu ignorase nici o soluție posibilă. Inutil să spunem că nici măcar acest procedeu atent elaborat și laborios nu putea face concluziile lui Descartes imune la eroare. De fapt, deşi Descartes este cunoscut mai cu seamă pentru monumentalele sale contribuții în filozofie, descoperirile sale cele mai durabile au fost în matematică. Mă voi concentra acum în particular asupra strălucitei și simplei sale idei pe care John Stuart Mill a considerat-o „cel mai măreț pas făcut vreodată în progresul științelor exacte“.

Matematica unei hărți a oraşului New York

Priviți harta parțială a Manhattanului din figura 24. Dacă vă aflați la intersecția Străzii 34 cu Eight Avenue și trebuie să vă întâlniți cu cineva la intersecția Străzii 59 cu Fifth Avenue, nu veți avea nici o problemă să găsiți drumul, nu-i aşa? Aceasta este esența ideii lui Descartes privind o nouă geometrie. El a schițat-o într-o anexă de 106 pagini la *Discursul despre metodă*, intitulată *La géométrie* (*Geometria*). Această idee remarcabil de simplă a revoluționat matematica. Descartes a pornit de la observația aproape banală că, aşa cum se vede în harta Manhattanului, o pereche de numere în plan poate determina fără ambiguitate poziția unui punct (de exemplu, punctul A din figura 25a). A folosit apoi acest lucru pentru a elabora o foarte riguroasă teorie a curbelor – *geometria*

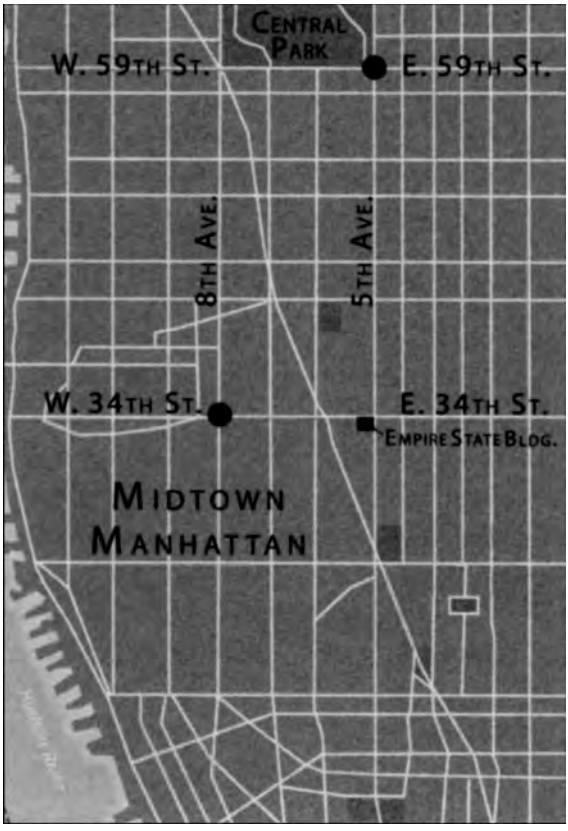


Figura 24

analitică. În amintirea lui Descartes, perechea de linii drepte care se intersectează pentru a ne da un sistem de referință este cunoscută astăzi sub numele de *sistem de coordonate carteziene*. În mod tradițional, linia orizontală este numită „axa *x*“, cea verticală „axa *y*“, iar punctul lor de intersecție „origine“. Punctul notat „A“ în figura 25a, de pildă, are coordonata *x* egală cu 3 și coordonata *y* egală cu 5, ceea ce se notează simbolic prin perechea ordonată de numere (3, 5). (Observați că originea este desemnată prin (0, 0).) Să presupunem acum că vrem să caracterizăm cumva toate

punctele planului care se află la o distanță de 5 unități față de origine. Desigur, aceasta e tocmai definiția unui cerc cu centrul în origine, cu o rază de cinci unități (figura 25b). Dacă luăm punctul (3, 4) pe acest cerc, găsim că relația $3^2 + 4^2 = 5^2$ este satisfăcută de coordonatele sale. De fapt, este ușor de arătat (folosind teorema lui Pitagora) că perechea de coordonate (x, y) ale oricărui punct de pe acest cerc satisface ecuația $x^2 + y^2 = 5^2$. Mai mult, punctele de pe cerc sunt singurele puncte din plan pentru ale căror coordonate este adevărată această ecuație ($x^2 + y^2 = 5^2$). Ceea ce înseamnă că ecuația algebrică $x^2 + y^2 = 5^2$ determină în mod exact și unic acest cerc. Cu alte cuvinte, Descartes a descoperit o cale de a reprezenta o curbă geometrică printr-o ecuație algebrică, sau numeric, și viceversa. Poate că acest lucru nu e prea incitant pentru un simplu cerc, dar orice grafic pe care îl veți fi văzut vreodată, de la suișurile și coborâșurile bursei la temperatura Polului Nord în secolul trecut sau la viteza de expansiune a universului, se bazează pe ingenioasa idee a lui Descartes. Brusc, geometria și algebra nu mai erau două ramuri separate ale matematicii, ci două reprezentări ale aceloraşi adevăruri. Ecuația unei curbe conține implicit toate proprietățile imaginabile ale curbei, inclusiv, de pildă,

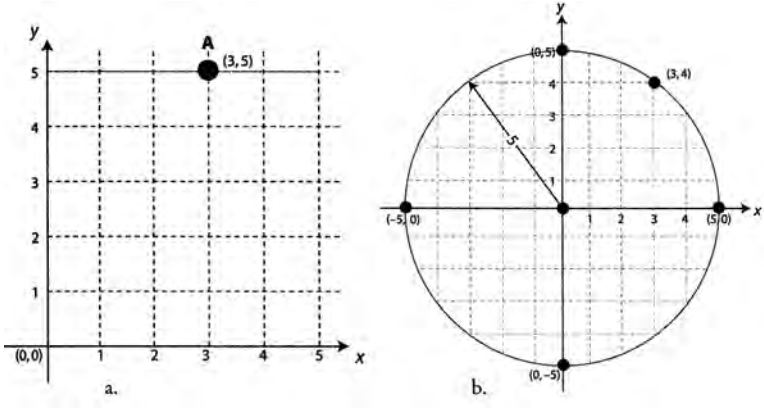


Figura 23

toate teoremele geometriei euclidiene. Și asta nu e tot. Descartes a arătat că diferite curbe pot fi desenate în același sistem de coordonate, iar punctele lor de intersecție pot fi determinate simplu prin găsirea soluției comune ecuațiilor algebrice ale acestora. Astfel, Descartes a reușit să exploateze forța algebrei pentru a corecta ceea ce el considera a fi slăbiciunile geometriei clasice. De pildă, Euclid definea punctul ca pe o entitate fără părți componente și fără mărime. Această definiție mai curând obscură a ieșit din uz pentru totdeauna odată ce Descartes a definit simplu punctul în plan ca perechea de numere ordonate (x, y). Dar chiar și aceste idei noi erau abia vârful aisbergului. Dacă două cantități x și y pot fi legate astfel încât oricărei valori a lui x să-i corespundă o unică valoare a lui y, atunci ele constituie o *funcție*, iar funcțiile sunt cu adevărat ubicue. Fie că vă supravegheați greutatea zilnică atunci când urmați un regim, greutatea copilului în fiecare an sau dependența consumului de benzină al mașinii de viteza cu care conduceți, toate datele pot fi reprezentate prin funcții.

Funcțiile sunt cu adevărat pâinea cea de toate zilele a oamenilor de știință, statisticienilor și economiștilor moderni. Odată ce experiențe sau observații științifice repetate produc aceeași relație funcțională, acestea pot atinge statutul înalt de legi ale naturii – descrieri matematice ale unui comportament de care ascultă toate fenomenele naturii. De pildă, legea gravitației, descoperită de Newton, la care vom reveni în acest capitol, afirmă că, atunci când distanța dintre două mase punctiforme se dublează, atracția gravitațională dintre ele scade de patru ori. Așadar, ideile lui Descartes au deschis poarta sistematizării matematice a aproape tot ce există – esența însăși a ideii de Dumnezeu-matematician. Din punct de vedere strict matematic, prin stabilirea echivalenței între cele două perspective ale matematicii (algebrică și geometrică) considerate înainte disjuncte, Descartes a extins orizontul matematicii și a pavat drumul spre arena modernă a *analizei,* care le-a permis matematicienilor să treacă ușor de la un subdomeniu matematic la altul. Prin urmare, nu numai diverse fenomene au putut fi descrise de matematică, dar matematica însăși a devenit mai vastă,

mai bogată și mai unificată. După cum spunea marele matematician Joseph-Louis Lagrange (1736–1813): „Atâta timp cât algebra și geometria au mers pe drumuri separate, au înaintat încet, iar aplicațiile lor au fost limitate. Dar când aceste două științe s-au reunit, au extras una de la alta forțe proaspete, iar de-atunci încoace au înaintat în ritm rapid spre desăvârșire."

Contribuțiile lui Descartes în matematică au fost importante, dar el nu s-a mărginit la acest domeniu. Știința, spunea Descartes, e asemeni unui arbore, metafizica fiind rădăcinile, fizica trunchiul, iar mecanica, medicina și morala cele trei ramuri principale. Alegerea ramurilor poate părea la prima vedere surprinzătoare, dar ele reprezintă cele trei domenii principale în care Descartes a vrut să-și aplice noile idei: universul, corpul omenesc și îndrumarea vieții. Descartes și-a petrecut primii patru ani de ședere în Olanda – din 1629 până în 1633 – scriind tratatul de cosmologie și fizică, *Le monde* (*Lumea*). Chiar în momentul în care cartea era gata pentru tipar, Descartes a fost șocat de niște vești tulburătoare. Într-o scrisoare către filozoful naturii Marin Mersenne (1588–1648) se plânge:

> Aveam intenția să vă trimit *Lumea* drept cadou de Crăciun, iar cu numai două săptămâni în urmă eram foarte hotărât să vă trimit cel puțin o parte a ei, dacă întreaga lucrare n-ar fi apucat să fie copiată. Dar trebuie să spun că, între timp, m-am interesat la Leiden și Amsterdam dacă putea fi găsit *Sistemul lumii* al lui Galilei, căci îmi trecuse pe la ureche că fusese publicat anul trecut în Italia. Mi s-a spus că a fost într-adevăr publicat, dar toate exemplarele au fost imediat arse la Roma, iar Galilei condamnat și amendat. Am rămas atât de înmărmurit aflând acest lucru, încât aproape că m-am hotărât să-mi ard toate hârtiile, sau cel puțin să nu las pe nimeni să le vadă. Fiindcă nu mi-am putut închipui că el – fiind italian și, din câte înțeleg, în grațiile Papei – a putut fi considerat criminal fără alt motiv decât acela de a fi încercat, după cum fără îndoială a și făcut, să arate că Pământul se mișcă. Știu că unii cardinali criticaseră deja această idee, și totuși mi s-a părut că am auzit că lucrul acesta era predat

> public la Roma. *Trebuie să recunosc că, dacă ideea e falsă, la fel sunt toate fundamentele filozofiei mele* [s. m.], căci ea se poate demonstra limpede pornind de la ele. Și este atât de strâns întrețesută în fiecare parte a tratatului meu, încât n-o pot suprima fără a-mi compromite întreaga lucrare. Dar pentru nimic în lume n-aș vrea să public un discurs în care poate fi găsit chiar și un singur cuvânt pe care Biserica l-ar dezaproba; așa că, decât să-l public într-o formă mutilată, am preferat să renunț.

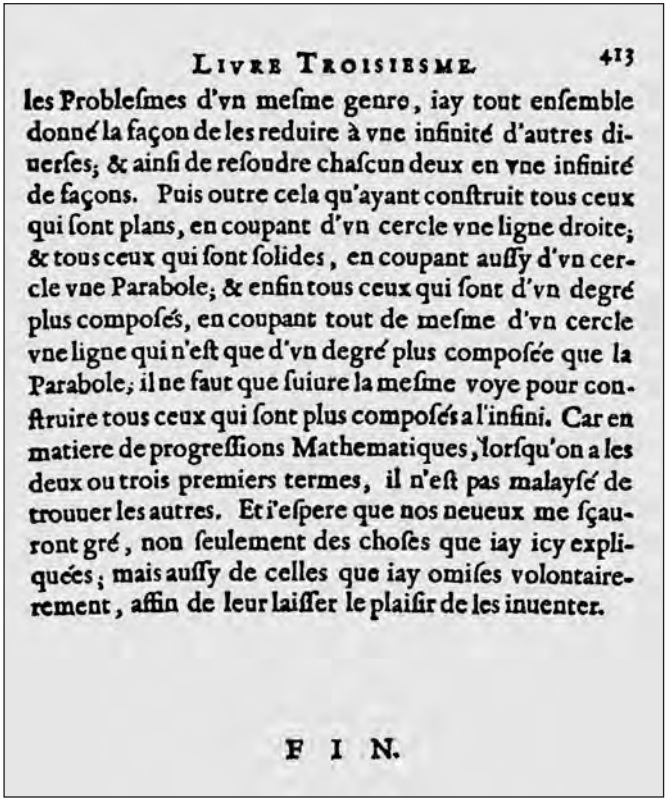
Descartes a abandonat într-adevăr *Lumea* (manuscrisul incomplet a fost până la urmă publicat în 1664), dar a inclus majoritatea rezultatelor în *Principiile filozofiei*, apărută în 1644. În acest discurs sistematic, Descartes prezintă legile naturii pe care le-a descoperit, precum și teoria vârtejurilor. Două dintre legile sale se apropie mult de faimoasele prime două legi ale mișcării enunțate de Newton, dar celelalte sunt în realitate greșite. Teoria vârtejurilor presupune că Soarele se află în centrul unei vâltori create în materia cosmică continuă. Ea presupune că planetele sunt antrenate de acest vârtej ca frunzele în bulboana formată de un râu. Planetele, la rândul lor, se presupunea că formau propriile lor vârtejuri secundare antrenând sateliții în jurul lor. Deși teoria vârtejurilor era spectaculos de falsă (după cum avea să sublinieze mai târziu nemilos Newton), ea era totuși interesantă, fiind prima încercare serioasă de a formula o teorie a universului ca întreg, întemeiată pe aceleași legi care se aplică și la suprafața Pământului. Cu alte cuvinte, pentru Descartes nu exista nici o diferență între fenomenele terestre și cele cerești – Pământul făcea parte dintr-un univers care asculta de legi fizice uniforme. Din nefericire, Descartes și-a ignorat propriile principii în construirea unei teorii detaliate care nu se baza nici pe o matematică necontradictorie, nici pe observații. Cu toate acestea, scenariul lui Descartes, în care Soarele și planetele perturbau cumva liniștita materie din jur, conținea unele elemente ce aveau să devină mai târziu piatra de temelie a teoriei einsteiniene a gravitației. În teoria generală a relativității, gravitația nu este o forță misterioasă care acționează pe distanțe mari în spațiu, ci

corpurile masive de tipul Soarelui sunt cele care deformează spațiul din vecinătatea lor, la fel cum o bilă de popice ar provoca afundarea unei plase elastice. Planetele urmează atunci pur și simplu cele mai scurte traiectorii posibile în acest spațiu deformat.

În această scurtă prezentare a ideilor lui Descartes am lăsat anume deoparte aproape întreaga sa operă filozofică, pentru că ea ne-ar fi îndepărtat prea mult de problema naturii matematicii (mă voi întoarce mai târziu la unele dintre ideile sale despre Dumnezeu). Nu mă pot abține totuși să includ următorul comentariu amuzant scris de matematicianul britanic Walter William Rouse Ball (1850–1925) în 1908:

> Cât despre teoriile sale [ale lui Descartes] filozofice, e suficient să spunem că a discutat aceleași probleme care fuseseră dezbătute în ultimii două mii de ani, și care vor fi dezbătute cu același zel două mii de ani de-acum încolo. Inutil să spunem că problemele însele sunt importante și interesante, dar, prin natura lor, nici o soluție oferită vreodată nu poate fi confirmată sau infirmată ferm; tot ce putem obține este să spunem că o explicație e mai probabilă decât alta, iar ori de câte ori un filozof precum Descartes a crezut că a lămurit în fine o problemă, urmașii săi au găsit o eroare ascunsă în presupuneri. Am citit undeva că filozofia a fost întotdeauna preocupată în cel mai înalt grad de raporturile dintre Dumnezeu, Natură și Om. Primii filozofi au fost grecii care se ocupau mai ales cu relațiile dintre Dumnezeu și Natură, și tratau Omul separat. Biserica Creștină a fost atât de absorbită de relația dintre Dumnezeu și Om, încât a neglijat complet Natura. În sfârșit, filozofii moderni s-au preocupat mai ales de relațiile dintre Om și Natură. Nu vreau să discut aici dacă aceasta e o generalizare corectă istoric a perspectivelor succesiv predominante, dar afirmația privind scopul filozofiei moderne marchează limitările scrierilor lui Descartes.

Descartes și-a încheiat cartea despre geometrie cu cuvintele: „Sper ca posteritatea să mă judece blând, nu numai pentru lucrurile pe



LIVRE TROISIESME. 413

les Probleſmes d'vn meſme genre, iay tout enſemble donné la façon de les reduire à vne infinité d'autres diuerſes; & ainſi de reſoudre chaſcun deux en vne infinité de façons. Puis outre cela qu'ayant conſtruit tous ceux qui ſont plans, en coupant d'vn cercle vne ligne droite; & tous ceux qui ſont ſolides, en coupant auſſy d'vn cercle vne Parabole; & enfin tous ceux qui ſont d'vn degré plus compoſés, en coupant tout de meſme d'vn cercle vne ligne qui n'eſt que d'vn degré plus compoſée que la Parabole; il ne faut que ſuiure la meſme voye pour conſtruire tous ceux qui ſont plus compoſés a l'infini. Car en matiere de progreſſions Mathematiques, lorſqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'eſt pas malayſé de trouuer les autres. Et i'eſpere que nos neueux me ſçauront gré, non ſeulement des choſes que iay icy expliquées; mais auſſy de celles que iay omiſes volontairement, affin de leur laiſſer le plaiſir de les inuenter.

FIN.

Figura 26

care le-am explicat, ci și pentru cele pe care le-am omis intenționat, spre a lăsa altora plăcerea de a descoperi“ (figura 26). Nu putea ști că cineva care avea numai opt ani la moartea lui Descartes va duce cu un pas uriaș înainte ideea că matematica e nucleul științei. Acest geniu neîntrecut a avut ocazia să simtă „plăcerea de a descoperi“ pesemne mai mult decât orice alt om din istoria omenirii.

Și a fost lumină

Alexander Pope, marele poet din secolul XVIII, avea treizeci și nouă de ani la moartea lui Isaac Newton (1642–1727) (figura 27 înfățișează mormântul lui Newton din Catedrala Westminster). În două versuri binecunoscute, Pope a încercat să cuprindă înfăptuirile lui Newton:

Natura și ale ei legi zăceau ascunse-n noapte:
Zis-a Dumnezeu: Să fie Newton! și totul s-a luminat.

La aproape o sută de ani de la moartea lui Newton, Lord Byron (1788–1824) a pus în poemul său epic *Don Juan* următoarele versuri:

De la Adam încoace, e singurul muritor
Ce poate înfrunta o cădere sau un măr.

Pentru generațiile de savanți care i-au urmat, Newton a fost și rămâne într-adevăr o figură legendară, dincolo de mituri. Faimosul

Figura 27

citat din Newton „Dacă am văzut mai departe este pentru că m-am urcat pe umerii unor uriași“ este adesea prezentat ca un model de generozitate și modestie pe care e de așteptat să le demonstreze oamenii de știință atunci când e vorba de marile lor descoperiri. De fapt, Newton a scris probabil această frază ca un răspuns sarcastic voalat la o scrisoare din partea celui pe care îl privea ca pe principalul său inamic științific, prolificul fizician și biolog Robert Hooke (1635–1703). Hooke îl acuzase pe Newton în mai multe rânduri că i-a furat ideile, întâi cu privire la teoria luminii, apoi cu privire la gravitație. Pe 20 ianuarie 1676, Hooke adoptă un ton mai împăciuitor, declarând într-o scrisoare personală către Newton: „Concepțiile dumneavoastră și ale mele [privind teoria luminii] țintesc amândouă, presupun, către același țel care este Descoperirea adevărului și presupun că amândoi putem suporta să auzim obiecții.“ Newton hotărăște să intre în joc. În răspunsul său la scrisoarea lui Hooke, datat 5 februarie 1676, scrie: „Ce a făcut Des-Cartes [Descartes] este un pas bun [referindu-se la ideile lui Descartes despre lumină]. Dumneavoastră ați adăugat mult pe diverse căi, mai cu seamă luând în considerare din punct de vedere filozofic culorile foilor subțiri. Dacă am văzut mai departe, este pentru că eu m-am urcat pe umerii unor uriași.“ Deoarece Hooke era foarte scund și cocoșat, cel mai cunoscut citat din Newton poate să însemne că acesta simțea că nu-i datora absolut nimic lui Hooke! Faptul că Newton nu a pierdut nici o ocazie de a-l insulta pe Hooke, afirmația că propria sa teorie a distrus „tot ce el [Hooke] a spus“ și refuzul său de a da la tipar propria sa carte despre lumină, *Optica*, înainte de moartea lui Hooke, sunt argumente care sugerează că această interpretare nu e prea trasă de păr. Vrajba dintre cei doi oameni de știință a atins o culme și mai înaltă când s-a ajuns la teoria gravitației. Când Newton a auzit că Hooke se pretindea a fi descoperitorul legii gravitației, a șters meticulos și răzbunător până la ultima referință numele lui Hooke din ultima parte a cărții sale pe această temă. Newton i-a scris prietenului său astronomul Edmond Halley (1656–1742) pe 20 iunie 1686:

> [Hooke] ar fi trebuit mai curând să-și ceară scuze pentru nepriceperea sa. Căci e limpede după spusele lui că nu era în stare să se descurce. Dar nu e oare ciudat? Matematicienii care descoperă, demonstrează și fac toată munca trebuie să se mulțumească cu statutul de socotitori și salahori prăfuiți, în vreme ce altul care nu face nimic, dar pretinde și însfacă totul, trebuie să-și atribuie toate invențiile, atât cele din viitor, cât și cele din trecut.

Newton spune fără înconjur de ce crede că Hooke n-are nici un merit – n-a fost în stare să-și formuleze ideile în limbaj matematic. Într-adevăr, caracteristica esențială a teoriilor lui Newton – cea care le-a făcut să fie adevărate legi ale naturii – a fost tocmai faptul că toate erau exprimate ca relații matematice coerente și de o limpezime cristalină. Prin comparație, ideile teoretice ale lui Hooke, oricât de ingenioase ar fi fost în multe cazuri, nu păreau decât o colecție de intuiții, ipoteze și speculații.

În paranteză fie spus, procesele-verbale ale Societății Regale din perioada 1661–1682, mult timp considerate pierdute, au reapărut brusc în februarie 2006. Caietul, conținând peste 520 de pagini scrise de mâna lui Robert Hooke însuși, a fost găsit într-o casă din Hampshire, Anglia, unde se crede că au fost păstrate într-un dulap vreme de vreo cincizeci de ani. Procesul-verbal din decembrie 1679 prezintă corespondența dintre Hooke și Newton, în care discutaseră un experiment care să confirme rotația Pământului.

Întorcându-ne la lovitura de maestru a lui Newton, trebuie spus că acesta a preluat concepția lui Descartes – potrivit căreia cosmosul poate fi descris de matematică – și a transformat-o într-o realitate operațională. În prefața la monumentala sa lucrare *Principiile matematice ale filozofiei naturale* (în latină, *Philosophiae naturalis principia mathematica* și cunoscută îndeobște ca *Principia*), afirma:

> Prezentăm această lucrare drept principiile matematice ale filozofiei, căci întreaga sarcină a filozofiei pare să constea în aceasta – pornind de la fenomenele mișcărilor să cercetăm forțele naturii, iar apoi, pornind de la aceste forțe, să

> demonstrăm celelalte fenomene: către acest scop se îndreaptă propozițiile generale din prima și din a doua carte. În cartea a treia dăm drept exemplu pentru aceasta explicarea Sistemului Lumii; căci, cu ajutorul propozițiilor demonstrate matematic în precedentele cărți, în cea de-a treia deducem din fenomenele cerești forța gravitației cu care corpurile tind către Soare și către cele câteva planete. Apoi, pornind de la aceste forțe, prin alte propoziții care sunt și ele matematice, deducem mișcarea planetelor, a cometelor, a Lunii și a mării.

Când ne dăm seama că Newton a înfăptuit într-adevăr în *Principia* tot ce promisese în prefață, nu putem decât să ne minunăm. Există aici și o trimitere răutăcioasă Descartes: titlul ales, *Principiile matematice*, în contrast cu *Principiile filozofiei* lui Descartes. Newton a adoptat același raționament matematic și aceeași metodologie chiar și în cartea sa despre lumină, *Optica*, mai mult întemeiată pe experiențe. Cartea începe astfel: „Scopul meu în această carte nu este să explic prin ipoteze proprietățile luminii, ci să le propun și să le demonstrez prin rațiune și experimente: drept care voi postula următoarele definiții și axiome.“ După care continuă ca și cum ar fi o carte de geometrie euclidiană, cu definiții și propoziții concise. În încheierea cărții, Newton adaugă și mai apăsat: „La fel ca în matematică, în filozofia naturii cercetarea problemelor dificile prin metoda analizei trebuie să preceadă întotdeauna metoda compunerii.“

Isprava lui Newton, folosind propriile sale instrumente matematice, ține de miracol. Acest geniu care, printr-o coincidență istorică, s-a născut exact în anul în care a murit Galilei, a formulat legile fundamentale ale mecanicii, a descifrat legile mișcării planetelor, a pus bazele teoretice ale fenomenelor luminii și culorii, și a întemeiat calculul diferențial și integral. Fie și numai aceste realizări ar fi fost de ajuns pentru a-i asigura lui Newton un loc de frunte în galeria celor mai însemnați oameni de știință. Dar cercetările sale asupra gravitației sunt cele care l-au așezat pe treapta cea mai înaltă a podiumului magicienilor – cea rezervată celui mai

mare om de știință din câți au trăit vreodată. Aceste cercetări au înălțat o punte între cer și pământ, au unit domeniile astronomiei și fizicii, și au așezat întregul cosmos sub o unică umbrelă matematică. Dar cum s-au născut *Principia*?

Am început să mă gândesc la gravitație extinzând-o la orbita Lunii

William Stukeley (1687–1765), anticar și medic, prieten cu Newton (în ciuda celor mai bine de patru decenii care îi separau ca vârstă), a devenit în cele din urmă primul biograf al marelui om de știință. În *Memoirs of Sir Isaac Newton's Life* (*Amintiri despre viața lui Isaac Newton*) găsim una dintre cele mai celebre legende din istoria științei:

> Pe 15 aprilie 1726, i-am făcut o vizită lui Sir Isaac în locuința din casele Orbels din Kensington, am luat masa împreună și am petrecut toată ziua singur cu el. […] După prânz, fiind vreme frumoasă, ne-am dus în grădină și am băut ceai la umbra unor meri, numai el și cu mine. Între altele, mi-a spus că se găsea exact în aceeași situație ca mai înainte [în 1666, când Newton se întorsese acasă de la Cambridge din pricina ciumei], atunci când i-a venit în minte ideea de gravitație. Ea a fost prilejuită de căderea unui măr pe când el stătea și cugeta. De ce trebuie mărul să cadă întotdeauna perpendicular pe sol, s-a întrebat el. De ce nu se duce în lateral sau în sus, ci mereu spre centrul pământului? Motivul trebuie să fie, fără îndoială, acela că-l atrage pământul. Trebuie să existe o putere de atracție în materie, iar suma puterilor de atracție din materia pământului trebuie să fie în centrul pământului, nu în vreo parte a lui. De aceea cade mărul perpendicular, sau spre centru. Dacă materia atrage astfel materia, atracția trebuie să fie proporțională cu cantitatea [de materie]. Prin urmare, mărul atrage

> pământul, la fel cum pământul atrage mărul. Atunci există o putere, ca aceea pe care o numim aici gravitație, care se întinde pretutindeni în univers […] Astfel s-au născut acele uimitoare descoperiri pe care a clădit o filozofie solid întemeiată, spre uimirea întregii Europe.

Indiferent dacă miticul eveniment cu mărul a avut sau nu loc în 1666, legenda subapreciază geniul lui Newton și profunzimea sa unică de analiză. Dacă nu încape îndoială că primul manuscris al lui Newton despre teoria gravitației datează dinainte de 1669, el nu avea nevoie să vadă acțiunea fizică a căderii mărului pentru a ști că Pământul atrage obiectele din apropierea suprafeței sale. Nici incredibila sa intuiție în formularea legii universale a gravitației nu putea depinde doar de contemplarea căderii unui măr. De fapt, există indicii că unele noțiuni esențiale de care Newton avea nevoie pentru a enunța legea atracției universale nu au fost concepute decât prin 1684–1685. O idee de asemenea anvergură este atât de rară în analele științei, încât chiar și o minte fenomenală – ca a lui Newton – a trebuit să ajungă la ea printr-un lung șir de pași deductivi.

Poate că totul a început în tinerețea lui Newton, când s-a întâlnit cu *Elementele*, masivul tratat de geometrie al lui Euclid. Potrivit mărturiei lui Newton, întâi a „citit numai titlurile propozițiilor“ pentru că le-a găsit atât de ușor de înțeles, încât s-a „mirat cum de și-a pierdut cineva vremea să scrie o demonstrație a lor“. Prima propoziție care l-a făcut să se oprească și să reflecteze a fost cea care spune că „într-un triunghi dreptunghic, pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor celor două catete“ – teorema lui Pitagora. Surprinzător, poate, deși Newton a citit câteva cărți de matematică pe când se afla la Cambridge, la Trinity College, n-a citit prea multe dintre lucrările disponibile la acea vreme. Evident, nu avea nevoie!

Cartea care i-a influențat pesemne cel mai mult gândirea matematică și științifică a fost *Geometria* lui Descartes. Newton a citit-o în 1664 și a recitit-o de mai multe ori, până când „treptat a ajuns s-o stăpânească în întregime“. Flexibilitatea permisă de

ideea de funcție și de variabile libere pare să fi deschis o infinitate de posibilități pentru Newton. Nu numai că geometria analitică i-a deschis drumul către inventarea calculului infinitezimal, cu studiul funcțiilor, tangentelor și curburilor, dar i-a și înflăcărat spiritul științific. Se terminase cu acele construcții greoaie cu rigla și compasul – ele erau acum înlocuite de curbe arbitrare ce puteau fi reprezentate prin expresii algebrice. Apoi, în 1665–1666, o teribilă ciumă lovește Londra. Când tributul plătit săptămânal morții atinge mii de oameni, colegiile din Cambridge sunt silite să-și închidă porțile. Newton e nevoit să părăsească școala și să se întoarcă acasă în îndepărtatul sat Woolsthorpe. Acolo, în liniștea de la țară, Newton face prima încercare de a demonstra că forța care menținea Luna pe orbită în jurul Pământului și gravitația Pământului (acea forță care făcea merele să cadă) sunt, de fapt, una și aceeași. Newton vorbește despre aceste prime eforturi într-o notă scrisă pe la 1714:

> În același an [1666] am început să mă gândesc la gravitație extinzând-o la orbita Lunii și, găsind cum să estimez forța cu care [un] glob rotindu-se într-o sferă apasă pe suprafața sferei din regula lui Kepler care spune că perioadele de revoluție ale planetelor sunt invers proporționale cu puterea 3/2 a distanțelor până la centrele orbitelor lor, am dedus că forțele care mențin planetele pe orbite trebuie să fie invers proporționale cu pătratele distanțelor față de centrele în jurul cărora se rotesc: apoi am comparat forța necesară pentru a menține Luna pe orbită cu forța gravitației la suprafața Pământului, și le-am găsit apropiate. Toate acestea s-au întâmplat în cei doi ani ai ciumei, 1665 și 1666, pe când mă aflam în plin elan creator și eram preocupat de matematică și filozofie mai mult decât am fost vreodată de atunci încoace.

Newton se referă aici la importanta sa deducție (din legile lui Kepler privind mișcarea planetelor) conform căreia atracția gravitațională dintre două corpuri sferice variază invers proporțional cu distanța dintre ele. Cu alte cuvinte, dacă distanța dintre Pământ și Lună

s-ar tripla, forța gravitațională pe care ar resimți-o Luna ar fi de nouă (trei la pătrat) ori mai mică.

Din motive nu tocmai limpezi, Newton a abandonat orice studiu serios pe tema gravitației și a mișcării planetelor până în 1679. Apoi, două scrisori din partea rivalului său Robert Hooke i-au trezit din nou interesul pentru dinamică în general și mișcarea planetelor în particular. Rezultatele acestei curiozități renăscute au fost spectaculoase – folosind legile mecanicii pe care le formulase anterior, Newton demonstrează a doua lege a lui Kepler privind mișcarea planetelor. Concret, el a arătat că, în cursul mișcării planetei pe o orbită eliptică în jurul Soarelui, dreapta care unește planeta cu Soarele mătură arii egale în intervale de timp egale (figura 28). A demonstrat și că „un corp rotindu-se pe o elipsă […] legea atracției către un focar al elipsei […] este invers proporțională cu pătratul distanței". Acestea au fost etape importante pe calea spre *Principii*.

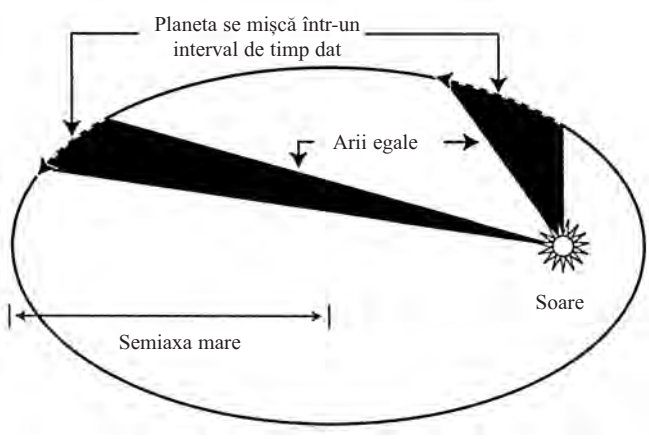


Figura 28

Principia

Halley s-a dus să-l viziteze pe Newton la Cambridge în primăvara lui 1684. De ceva vreme Halley discuta cu Hooke şi cu renumitul arhitect Cristopher Wren (1632–1723) legile lui Kepler privind mişcarea planetelor. În cursul acestor discuţii la cafenea, atât Hooke cât şi Wren au pretins că deduseseră legea proporţionalităţii cu inversul pătratului câţiva ani mai devreme, dar nici unul din ei n-a putut construi o teorie matematică închegată din această deducţie. Halley s-a hotărât să-i pună lui Newton întrebarea crucială: ştia ce formă are orbita unei planete asupra căreia acţionează o forţă variind după legea inversului pătratului? Spre uimirea sa, Newton i-a răspuns că demonstrase cu câţiva ani mai devreme că orbita e o elipsă. Matematicianul Abraham de Moivre (1667–1754) istoriseşte povestea într-o notă (din care e prezentată o pagină în figura 29):

> În 1684, Dr. Halley s-a dus să-l viziteze [pe Newton] la Cambridge, iar, după un timp petrecut împreună, Dr. l-a întrebat care crede că ar fi curba descrisă de planete, presupunând că forţa de atracţie spre soare ar fi inversul pătratului distanţei faţă de acesta. Sir Isaac i-a răspuns imediat că ar fi o ellipsis [elipsă], Doctorul bucuros şi uimit l-a întrebat de unde ştia acest lucru, iar Newton a răspuns „am calculat-o“, la care Dr. Halley i-a cerut neîntârziat calculul, Sir Isaac a căutat printre hârtiile sale şi nu l-a putut găsi, dar a promis să-l refacă şi să i-l trimită.

Halley s-a dus într-adevăr să-l viziteze din nou pe Newton în noiembrie 1684. Între cele două vizite, Newton a muncit frenetic. De Moivre ne face o scurtă prezentare:

> Sir Isaac s-a apucat de lucru din nou pentru a-şi ţine promisiunea şi nu a putut ajunge la concluzia pe care credea că o examinase atent înainte, dar a încercat o nouă cale care, deşi mai lungă decât prima, l-a adus din nou la vechea sa concluzie, apoi a cercetat cu atenţie care putea fi cauza

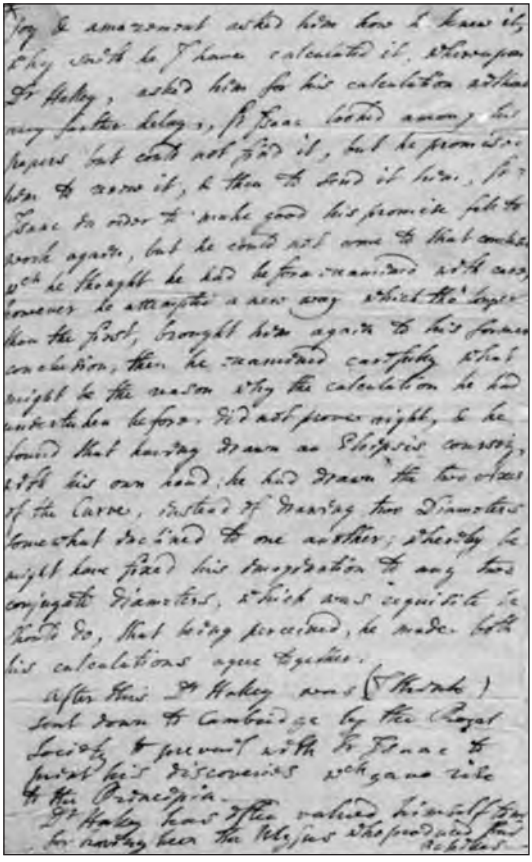


Figura 29

pentru care calculul pe care îl făcuse înainte nu se dovedise corect, și […] a făcut ca cele două calcule să fie în acord.

Acest rezumat sec nici măcar nu începe să ne spună ce a realizat de fapt Newton în puținele luni dintre cele două vizite ale lui Halley. A scris un întreg tratat, *De motu corporum in gyrum* (*Asupra mișcării corpurilor în rotație*), în care demonstrează majoritatea proprietăților corpurilor aflate în mișcare pe orbite circulare

sau eliptice, demonstrează toate legile lui Kepler și rezolvă chiar și mișcarea unei particule în mișcare într-un mediu rezistent (ca aerul). Halley este copleșit. Spre satisfacția sa, reușise măcar să-l convingă pe Newton să publice toate aceste uimitoare descoperiri – *Principia* erau pe drum.

La început Newton privise cartea doar ca pe o versiune ceva mai extinsă și mai detaliată a tratatului său *De motu* (*Asupra mișcării*). Apucându-se de lucru, și-a dat seama că unele subiecte cereau mai multă reflecție. Două probleme continuau să-l neliniștească pe Newton. Una era următoarea: el formulase inițial legea atracției gravitaționale ca și cum Soarele, Pământul și planetele ar fi mase matematice punctiforme, fără dimensiuni. Știa, desigur, că acest lucru nu era adevărat, prin urmare își considera rezultatele aproximative atunci când erau aplicate sistemului solar. Unii au lansat chiar ipoteza că a abandonat din nou cercetarea subiectului gravitației în 1679 din pricina nemulțumirii față de această situație. Lucrurile stăteau și mai rău în ce privea forța asupra mărului. În acel caz, era limpede că partea Pământului aflată direct sub măr se afla la mult mai mică distanță decât orice altă parte de pe cealaltă față a Pământului. Cum putea fi calculată atracția netă? Astronomul Herbert Hall Turner (1861–1930) a vorbit despre efortul intelectual al lui Newton într-un articol apărut în ziarul londonez *Times* pe 19 martie 1927:

> La acea vreme avea deja ideea generală de atracție care variază cu inversul pătratului distanței, dar a întrevăzut serioase dificultăți în aplicarea ei, dificultăți de care minți mai puțin pătrunzătoare nu erau conștiente. Nu a putut depăși cea mai importantă dintre aceste dificultăți până în 1685 […]. Ea era aceea de a lega atracția pământului față de un corp atât de îndepărtat ca Luna de atracția față de mărul din apropierea suprafeței sale. În primul caz, diferitele particule care compun pământul (la care Newton spera să extindă în mod individual legea, pentru a o face astfel universală) se află la distanțe nu foarte diferite ca mărime și direcție față de Lună; dar distanțele lor față de măr diferă mult atât ca

> mărime, cât și ca direcție. Cum pot fi atracțiile separate din al doilea caz adunate sau combinate într-o singură rezultantă? Și în care „centru de gravitație", dacă există vreunul, ar putea fi ele concentrate?

Descoperirea a fost făcută în cele din urmă în primăvara lui 1685. Newton a reușit să demonstreze o teoremă esențială: pentru două corpuri sferice, „întreaga forță cu care una dintre sfere o atrage pe cealaltă este invers proporțională cu pătratul distanței dintre centre". Corpurile sferice acționează deci ca și cum ar fi mase punctiforme concentrate în centrele lor. Importanța acestei frumoase demonstrații a fost subliniată de matematicianul James Whitbread Lee Glaisher (1848–1928). În discursul său, cu ocazia sărbătoririi bicentenarului *Principiilor* lui Newton (în 1887), Glaisher a spus:

> De îndată ce Newton a demonstrat această superbă teoremă – și știm din propriile-i cuvinte că nu se aștepta la un rezultat atât de frumos până n-a reieșit din calculele sale matematice – întregul mecanism al universului i s-a înfățișat brusc. […] Cât de diferite trebuie să-i fi apărut aceste propoziții lui Newton când și-a dat seama că rezultatele, pe care le crezuse numai aproximativ adevărate atunci când erau aplicate sistemului solar, erau cu adevărat exacte! […] Ne putem închipui efectul acestei treceri bruște de la aproximație la exactitate în stimularea minții lui Newton către eforturi și mai mari. Stătea acum în puterea lui să aplice analiza matematică, cu precizie absolută, la problema concretă a astronomiei.

Cealaltă problemă care părea să-l tulbure încă pe Newton pe când făcea primele planuri pentru *De motu* era faptul că neglijase influența forțelor prin care planetele atrăgeau Soarele. Cu alte cuvinte, în formularea inițială, redusese Soarele la un centru de forță nemișcat de genul celor care „nu prea există" în lumea reală, după cum spunea Newton. Această schemă contrazicea a treia lege de mișcare a lui Newton, după care „acțiunile corpurilor de a atrage și a fi atrase sunt întotdeauna reciproce și egale". Fiecare planetă

atrage Soarele exact cu aceeași forță cu care Soarele atrage planeta. Prin urmare, adaugă Newton, „dacă avem două corpuri [ca Pământul și Soarele], nici cel care atrage, nici cel care e atras nu poate fi în repaus“. Această descoperire, la prima vedere minoră, a fost de fapt o treaptă importantă către înțelegerea gravitației universale. Putem încerca să ghicim raționamentul lui Newton: dacă Soarele atrage Pământul, atunci și Pământul trebuie să atragă Soarele, cu aceeași intensitate. Adică Pământul nu orbitează pur și simplu în jurul Soarelui, ci ambii se rotesc în jurul centrului de gravitație comun. Dar asta nu e tot. Toate celelalte planete atrag la rândul lor Soarele, iar fiecare planetă simte nu numai atracția Soarelui, ci și pe cea a tuturor celorlalte planete. Aceeași logică se aplică lui Jupiter și sateliților săi, Pământului și Lunii, ba chiar și mărului și Pământului. Concluzia e uimitor de simplă – *există o unică forță gravitațională care acționează între oricare două mase, pretutindeni în univers*. De asta avea nevoie Newton. *Principiile* – 510 pagini dense în latină – au fost publicate în iulie 1687.

Newton a folosit observații și experimente având o precizie de numai aproximativ 4%, din care a dedus o lege matematică a gravitației care s-a dovedit a fi mai precisă de unu la un milion. El a unit pentru prima oară *explicații* ale fenomenelor naturale cu puterea de *predicție* a rezultatelor observațiilor. Fizica și matematica s-au împletit pentru totdeauna, iar divorțul dintre știință și filozofie a devenit inevitabil.

A doua ediție a *Principiilor*, redactată de Newton și de matematicianul Roger Cotes (1682–1716), a apărut în 1713 (figura 30 înfățișează pagina de gardă). Newton, care n-a excelat niciodată în amabilitate, nici nu s-a sinchisit să-i mulțumească lui Cotes în prefața cărții pentru imensa muncă depusă. Totuși, atunci când Cotes s-a stins, la vârsta de 33 de ani, în urma unei febre violente, Newton i-a arătat o oarecare considerație: „Dacă ar fi trăit, am fi aflat câte ceva.“

Unele observații memorabile ale lui Newton despre Dumnezeu apar abia în ediția a doua. Într-o scrisoare către Cotes din 28 martie 1713, cu trei luni înainte de încheierea celei de-a doua ediții

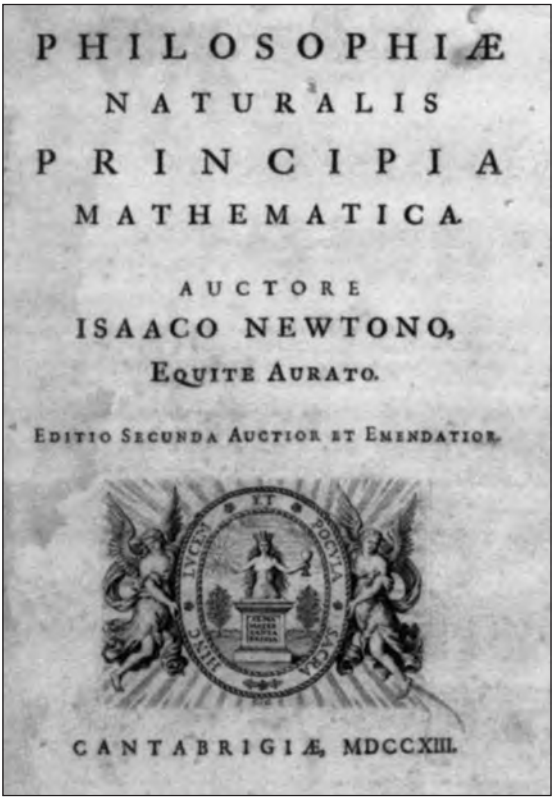


Figura 30

a *Principiilor*, Newton spune: „Este fără îndoială sarcina filozofiei naturii să vorbească despre Dumnezeu pornind de la fenomene [ale naturii].“ Într-adevăr, Newton își dezvăluie ideile despre un Dumnezeu „etern și infinit, atotputernic și atotcunoscător“ în „Comentariu general“ – secțiunea pe care o considera încununarea *Principiilor*.

Rămânea însă oare neschimbat rolul lui Dumnezeu în acest univers din ce în ce mai matematic? Sau Dumnezeu era perceput tot mai mult ca un matematician? La urma urmelor, până la formularea

legii gravitației, mișcările planetelor erau privite ca una dintre lucrările negreșit dumnezeiești. Cum priveau Newton și Descartes această deplasare de accent către explicarea științifică a naturii?

Dumnezeul matematician al lui Newton și Descartes

Ca majoritatea oamenilor din vremea lor, Newton și Descartes erau credincioși. Voltaire (1694–1778), care a scris mult despre Newton, este autorul celebrei vorbe „Dacă Dumnezeu n-ar exista, ar trebui inventat".

Pentru Newton, însăși existența lumii și a regularității matematice a cosmosului observat era o dovadă a prezenței lui Dumnezeu. Acest tip de raționament cauzal, folosit pentru prima dată de teologul Toma d'Aquino (cca 1225–1274), în filozofie intră în categoria argumentului *cosmologic* și a celui *teleologic*. Simplu spus, argumentul cosmologic afirmă că, din moment ce lumea fizică a apărut cumva, trebuie să existe o Cauză Primă, anume un Dumnezeu creator. Argumentul teleologic sau *argumentul proiectului* încearcă să ofere dovada existenței lui Dumnezeu din aparenta proiectare a lumii. Iată gândurile lui Newton, exprimate în *Principia*: „Acest atât de frumos sistem al Soarelui, planetelor și cometelor nu poate să fi apărut decât prin sfatul și stăpânirea unei Ființe inteligente atotputernice. Iar dacă stelele fixe sunt centrele altor asemenea sisteme, acestea, fiind alcătuite prin același sfat înțelept, trebuie să se afle toate sub stăpânirea acelui Unu." Validitatea argumentelor cosmologic, teleologic și a altora asemănătoare ca dovadă a existenței lui Dumnezeu a fost subiect de dezbatere între filozofi timp de secole. Impresia mea dintotdeauna a fost că teiștii n-au nevoie de aceste argumente ca să fie convinși, iar ateii nu sunt convinși de ele.

Newton a mai adăugat un argument, întemeiat pe universalitatea legilor sale. Faptul că întregul cosmos e guvernat de aceleași legi și pare stabil era privit ca o dovadă în plus pentru mâna

călăuzitoare a lui Dumnezeu, „mai cu seamă din moment ce lumina stelelor fixe este de *același fel* [s. m.] cu lumina Soarelui, iar din fiecare sistem lumina trece în toate celelalte sisteme; și, ca nu cumva sistemele stelelor fixe să cadă unele peste altele din cauza gravitației, a așezat aceste sisteme la distanțe uriașe unele față de altele".

În *Optica*, Newton spune limpede că nu crede că legile naturii sunt suficiente pentru a explica existența universului – Dumnezeu e creatorul și susținătorul tuturor atomilor care constituie materia cosmică: „Căci El [Dumnezeu] i-a creat [pe atomi] pentru a-i așeza în ordine. Iar dacă a făcut astfel, e nefilozofic să cauți orice altă Origine a Lumii sau să pretinzi că ea ar putea apărea din Haos doar prin Legile Naturii." Cu alte cuvinte, pentru Newton, Dumnezeu era (între altele) matematician, nu numai ca figură de stil, ci aproape literalmente – Dumnezeu Creatorul a făcut să apară o lume fizică guvernată de legi matematice.

Fiind mult mai aplecat spre filozofie decât Newton, Descartes fusese foarte preocupat de demonstrarea existenței lui Dumnezeu. Pentru el, calea de la certitudinea existenței noastre („Cuget, deci exist") la capacitatea de a construi un tablou științific obiectiv trebuia să treacă printr-o dovadă incontestabilă a existenței unui Dumnezeu întru totul desăvârșit. Acest Dumnezeu, susține el, e sursa ultimă a tuturor adevărurilor și singurul garant al faptului că raționamentul uman este corect. Acest argument suspect de circular (cunoscut sub numele de *cerc cartezian*) a fost criticat deja din vremea lui Descartes, în special de filozoful, teologul și matematicianul francez Antoine Arnault (1612–1694). Arnault a pus o întrebare de o simplitate distrugătoare: dacă avem nevoie să demonstrăm existența lui Dumnezeu pentru a garanta validitatea procesului gândirii umane, cum putem avea încredere în demonstrație, ea însăși produs al minții umane? Deși Descartes a făcut câteva încercări disperate de a ieși din acest cerc vicios, mulți dintre filozofii care i-au urmat n-au găsit eforturile sale prea convingătoare. „Demonstrația suplimentară" a existenței lui Dumnezeu, adusă de Descartes, era și ea discutabilă. În filozofie ea poartă numele de *argument*

ontologic. Filozoful teolog Sf. Anselm de Canterbury (1033–1109) a formulat pentru prima dată acest tip de raționament în 1078, iar de-atunci a reapărut sub diverse forme. Raționamentul este, în linii mari, următorul: prin definiție, Dumnezeu atinge o asemenea perfecțiune, încât este cea mai desăvârșită ființă care se poate concepe. Dar, dacă Dumnezeu n-ar exista, atunci am putea concepe o ființă încă mai desăvârșită – una care, în plus față de faptul de a fi binecuvântată cu toate însușirile lui Dumnezeu, mai și există. Aceasta ar contrazice definiția care spune că Dumnezeu este cea mai desăvârșită ființă care se poate concepe – prin urmare, Dumnezeu trebuie să existe. După cum spunea Descartes: „Existența nu poate fi separată de esența lui Dumnezeu, așa cum nu putem separa de esența triunghiului faptul că suma unghiurilor sale este egală cu două unghiuri drepte."

Acest gen de manevră logică nu convinge prea mulți filozofi, iar aceștia susțin că, pentru a stabili existența oricărui lucru din lumea fizică, în particular a ceva atât de desăvârșit ca Dumnezeu, logica singură nu este de ajuns.

Descartes a fost acuzat, în mod surprinzător, că încurajează ateismul, iar lucrările sale au fost trecute în Indexul Cărților Interzise de Biserica Catolică, în 1667. Acuzație bizară, din moment ce Descartes susținea că Dumnezeu este garantul absolut al adevărului.

Lăsând deoparte chestiunile pur filozofice, lucrul cel mai interesant din perspectiva cărții de față e credința lui Descartes că Dumnezeu a creat toate „adevărurile eterne". În particular, el susține că „adevărurile matematice pe care le numim eterne au fost stabilite de Dumnezeu și depind de El în întregime, nu mai puțin decât restul creaturilor sale". Astfel, Dumnezeul cartezian e mai mult decât un matematician, în sensul că este atât creatorul matematicii, cât și al lumii fizice care se bazează în întregime pe matematică. Potrivit acestei perspective asupra lumii, care devenea predominantă la sfârșitul secolului XVII, oamenii doar *descoperă* matematica, nu o inventează.

Încă mai important e faptul că Galilei, Descartes și Newton au transformat profund relația dintre matematică și știință. În

primul rând, evoluția explozivă a științei a devenit o motivație puternică pentru cercetarea matematică. În al doilea rând, prin legile lui Newton, domenii matematice și mai abstracte, precum calculul infinitezimal, au devenit *esența* explicațiilor fizice. În fine, și poate cel mai important, granița dintre matematică și știință a fost practic ștearsă, ajungându-se la fuziunea completă între ideile matematice și largi zone de explorare. Toate aceste progrese au creat un entuziasm pentru matematică întâlnit doar pe vremea vechilor greci. Matematicienii au simțit că lumea trebuia cucerită și că oferea o sursă nelimitată pentru descoperiri.

Capitolul 5

Statisticienii și probabiliștii: Știința incertitudinii

Lumea nu rămâne neclintită. Majoritatea lucrurilor care ne înconjoară sunt fie în mișcare, fie se transformă continuu. Chiar aparent fermul Pământ de sub picioare se învârte de fapt în jurul propriei axe, se rotește în jurul Soarelui și călătorește (împreună cu Soarele) în jurul centrului galaxiei Calea Lactee. Aerul pe care îl respirăm e alcătuit din mii de miliarde de molecule care se mișcă haotic neîncetat. În același timp, plantele cresc, materialele radioactive se dezintegrează, temperatura atmosferică urcă și coboară zilnic, dar și sezonier, iar speranța de viață a oamenilor continuă să crească. Acest neastâmpăr cosmic nu a pus totuși în încurcătură matematica. Ramura matematicii numită *calcul infinitezimal* a fost creată de Newton și Leibniz tocmai pentru a permite o analiză riguroasă și o modelare precisă atât a mișcării, cât și a transformării. De-atunci încoace, acest instrument a devenit atât de puternic și cuprinzător, încât poate fi folosit pentru a studia probleme diverse, de la deplasarea unei navete spațiale la răspândirea unei boli infecțioase. La fel cum un film poate surprinde mișcarea fragmentând-o în secvențe cadru-cu-cadru, calculul infinitezimal poate măsura schimbarea folosind o diviziune atât de fină, încât permite determinarea unor cantități care au doar o existență efemeră, precum viteza, accelerația sau rata de schimbare instantanee.

Mergând pe urmele lui Newton și Leibniz, matematicienii Epocii Rațiunii (sfârșitul secolului XVII și secolul XVIII) au extins calculul infinitezimal la încă mai puternica și larg aplicabila

ramură a *ecuațiilor diferențiale*. Înarmați cu acest nou instrument, oamenii de știință puteau acum prezenta teorii matematice detaliate ale unui spectru larg de fenomene, de la muzica produsă de coarda unei viori la difuzia căldurii, de la mișcarea unui titirez la curgerea lichidelor și a gazelor. Pentru o vreme, ecuațiile diferențiale au devenit instrumentul progresului fizicii.

Între primii exploratori ai noilor perspective deschise de ecuațiile diferențiale au fost membrii legendarei familii Bernoulli. Între mijlocul secolului XVII și mijlocul secolului XIX, această familie a dat nu mai puțin de opt matematicieni de marcă. Acești oameni de talent erau cunoscuți aproape în aceeași măsură pentru dușmăniile din familie, ca și pentru excepționalele lor rezultate matematice. Dacă certurile se legau întotdeauna de disputa pentru supremație în matematică, unele dintre problemele care le declanșau ne par azi banale. Și totuși, rezolvarea acestor probleme a deschis calea către mari descoperiri matematice. În general, nu încape îndoială că familia Bernoulli a jucat un rol important în consacrarea matematicii ca limbaj ce descrie o diversitate de procese fizice.

Un exemplu pentru complexitatea intelectuală a doi dintre cei mai străluciți Bernoulli – frații Jakob (1654–1705) și Johann (1667–1748) – e dat de următoarea istorioară. Jakob Bernoulli a fost unul dintre pionierii *teoriei probabilităților*, și ne vom întoarce la el în acest capitol. În 1690 însă, Jakob era ocupat cu reexaminarea unei probleme studiate cu două secole în urmă de Leonardo da Vinci, omul ce reprezintă chintesența Renașterii: care e forma luată de un lanț deformabil, dar inextensibil, suspendat în două puncte fixe (ca în figura 31)? Leonardo desenase câteva asemenea lanțuri în carnetele sale. Problema fusese de asemenea prezentată lui Descartes de către prietenul său Isaac Beeckman, dar nu există nici o dovadă că Descartes ar fi încercat s-o rezolve. În cele din urmă, problema a devenit cunoscută ca *problema catenarei* (de la cuvântul latinesc *catena*, însemnând „lanț“). Galilei credea că forma ar fi parabolică, dar iezuitul francez Ignatius Pardies (1636–1673) a demonstrat că se înșelase. Pardies nu a putut însă găsi forma corectă.

Figura 31

La numai un an după ce Jakob Bernoulli și-a pus problema, mai tânărul său frate Johann a rezolvat-o (folosind o ecuație diferențială). Leibniz și fizicianul-matematician olandez Christiaan Huygens (1629–1695) au rezolvat-o la rândul lor, dar Huygens a folosit o metodă geometrică mai complicată. Faptul că Johann a reușit să rezolve o problemă care îl blocase pe fratele și profesorul său a continuat să-i producă satisfacții mai tânărului Bernoulli chiar și la treisprezece ani după moartea lui Jakob. Într-o scrisoare pe care Johann i-o scrie pe 29 septembrie 1718 matematicianului francez Pierre Rémond de Montmort (1678–1719), nu-și poate ascunde încântarea:

> Spui că fratele meu a propus această problemă; este adevărat, dar rezultă de aici că avea o soluție pentru ea? Nicidecum. Atunci când a propus această problemă la sugestia mea (pentru că eu am fost primul care s-a gândit la ea), nici unul dintre noi n-a fost în stare s-o rezolve; ne-am pierdut speranța că ar fi rezolvabilă până când Dl. Leibniz a anunțat public în revista din Leipzig din 1690, p. 360, că rezolvase problema, dar n-a publicat soluția, pentru a da răgaz altor analiști, iar acest lucru ne-a încurajat pe fratele meu și pe mine să încercăm din nou.

După ce afirmă, fără rușine, că el este autorul problemei, Johann continuă cu nedisimulată jubilație:

> Eforturile fratelui meu a fost zadarnice; în ce mă privește, eu am avut mai mult noroc, căci am găsit tehnica (o spun fără să mă laud, de ce să ascund adevărul?) de a o rezolva în întregime. […] Este adevărat că mi-a cerut un efort care mi-a răpit odihna unei nopți întregi […] dar în dimineața următoare am alergat bucuros la fratele meu, care încă se lupta cumplit cu nodul gordian fără a ajunge nicăieri, crezând mai departe, la fel ca Galilei, că este o parabolă catenara. Oprește-te! Oprește-te! i-am spus, nu te mai chinui în încercarea de a demonstra identitatea dintre catenară și parabolă, fiindcă e complet falsă. […] Apoi însă m-ai uimit trăgând concluzia că fratele meu găsise o metodă de a rezolva problema […] Te întreb: dacă fratele meu ar fi rezolvat problema, chiar îți închipui că ar fi fost atât de amabil cu mine încât să nu se treacă printre rezolvatori, doar pentru a-mi ceda mie gloria de a apărea singur pe scenă în calitate de prim rezolvator, alături de domnii Huygens și Leibniz?

Dacă mai era nevoie de o dovadă că matematicienii sunt și ei oameni, această istorioară o arată din plin. Rivalitatea familială nu scade însă cu nimic meritele celor din familia Bernoulli. În anii care au urmat episodului catenarei, Jakob, Johann și Daniel Bernoulli (1700–1782) au continuat nu numai să rezolve alte probleme asemănătoare cu frânghii care atârnă, dar au și dezvoltat teoria ecuațiilor diferențiale în general, și au rezolvat problema mișcării proiectilelor într-un mediu rezistent.

Povestea catenarei demonstrează și o altă latură a forței matematicii – până și problemele fizice aparent banale au soluții matematice. În paranteză fie spus, forma catenarei continuă să încânte milioanele de vizitatori ai faimosului Gateway Arch din St. Louis, Missouri.* Arhitectul american de origine finlandeză Eero Saarinen

---

* Monument în formă de arcadă, închinat pionierilor care au cucerit Vestul american. (*N. t.*)

(1910–1961) și inginerul american de origine germană Hannskarl Bandel (1925–1993) au conceput această structură emblematică în formă de catenară inversată.

Marele succes al fizicii în descoperirea legilor matematice care guvernează cosmosul a condus inevitabil la întrebarea dacă principii asemănătoare ar putea sta la baza proceselor biologice, sociale sau economice. Este matematica doar limbajul naturii, s-au întrebat matematicienii, sau este și limbajul naturii umane? Chiar dacă nu există principii cu adevărat universale, ar putea fi folosite instrumentele matematice măcar pentru a modela și apoi a explica comportamentul social? La început, mulți matematicieni erau convinși că „legi“ bazate pe diverse versiuni ale calculului infinitezimal ar putea prezice cu exactitate toate evenimentele viitoare, mari sau mici. Asta credea, de pildă, marele fizician și matematician Pierre-Simon de Laplace (1749–1827). Primele cinci volume ale *Mecanicii cerești* (*Mécanique céleste*) a lui Laplace ofereau întâia soluție practic completă (chiar dacă aproximativă) a mișcării în sistemul solar. În plus, Laplace a răspuns la întrebarea care îl pusese în încurcătură chiar pe Newton: de ce este sistemul solar atât de stabil? Newton credea că, datorită atracției reciproce, planetele ar trebui să cadă pe Soare sau să-și ia zborul în spațiul liber, și invocase mâna lui Dumnezeu pentru a păstra intact sistemul solar. Laplace vedea altfel lucrurile. În loc să se bazeze pe lucrarea lui Dumnezeu, el a demonstrat matematic că sistemul solar e stabil pe perioade de timp mult mai lungi decât își închipuia Newton. Pentru a rezolva această problemă complicată, Laplace a creat un nou formalism matematic numit *teoria perturbațiilor*, care îi permitea să calculeze efectele cumulate a numeroase mici influențe asupra orbitei fiecărei planete. În final, pentru a încununa totul, Laplace a propus unul dintre primele modele privind originea sistemului solar – conform *ipotezei nebulare*, sistemul solar s-a format dintr-o nebuloasă de gaz care s-a contractat.

Date fiind toate aceste impresionante realizări, nu e surprinzător că Laplace afirma plin de îndrăzneală în *Încercare filozofică asupra probabilităților*:

> Toate evenimentele, chiar și cele care, neînsemnate fiind, nu par să urmeze marile legi ale naturii, sunt rezultatul acestora cu aceeași necesitate ca revoluțiile Soarelui. Necunoscând legăturile care unesc asemenea evenimente cu întreg sistemul universului, s-a crezut că ele depind de cauze finale sau de hazard. […] Trebuie atunci să considerăm că starea actuală a universului este efectul stării sale anterioare și cauza celei care va urma. Dacă ar exista pentru o clipă o inteligență care să poată cuprinde toate forțele ce însuflețesc natura și situațiile respective ale ființelor care o alcătuiesc – o inteligență îndeajuns de vastă pentru a putea analiza toate aceste date –, ea ar îmbrățișa în aceeași formulă mișcările celor mai mari corpuri din univers și ale celor mai ușori atomi; pentru ea, nimic nu ar fi incert, iar viitorul, ca și trecutul, ar fi prezent în ochii săi. În desăvârșirea pe care a putut-o conferi astronomiei, mintea umană oferă doar o palidă idee despre această inteligență.

Când vorbea despre această ipotetică „inteligență“ supremă, Laplace nu se gândea la Dumnezeu. Spre deosebire de Newton și Descartes, Laplace nu era credincios. Atunci când i-a înmânat lui Napoleon Bonaparte un exemplar al *Mecanicii cerești*, acesta din urmă, care auzise că nu exista nici o referire la Dumnezeu în lucrare, a observat: „Domnule Laplace, mi s-a spus că ați scris această carte uriașă despre sistemul universului fără a-l pomeni vreodată pe creatorul lui.“ Laplace i-a răspuns pe loc: „Nu am avut nevoie să fac această ipoteză.“ Amuzat, Napoleon i-a relatat răspunsul matematicianului Joseph-Louis Lagrange, care a exclamat: „Ah! Iată o frumoasă ipoteză; explică multe lucruri.“ Povestea însă nu se oprește aici. Când a aflat despre reacția lui Lagrange, Laplace a spus sec: „Această ipoteză, sire, explică într-adevăr totul, dar nu ne permite să prezicem nimic. Ca savant, eu trebuie să vă pun la dispoziție lucrări care ne permit să facem predicții.“

Dezvoltarea mecanicii cuantice – teoria lumii subatomice – în secolul XX a dovedit că ideea de univers complet determinist fusese prea optimistă. Fizica modernă a demonstrat că e imposibil

să prezicem rezultatul fiecărui experiment, chiar și în principiu. Teoria nu poate prezice decât probabilități ale diferitelor rezultate. Situația din științele sociale este încă și mai complexă din pricina numărului mare de elemente interconectate, dintre care multe sunt, în cel mai bun caz, incerte. Savanții secolului XVII și-au dat seama destul de repede că era absurd să cauți principii sociale universale precise, asemenea legii newtoniene a gravitației. Pentru o vreme, se părea că atunci când intervenea complexitatea naturii umane era imposibil de făcut predicții sigure. Lucrurile stăteau și mai rău atunci când erau implicate mințile unei întregi populații. În loc să dispere însă, câțiva gânditori ingenioși au elaborat un nou arsenal de instrumente matematice – *statistica* și *teoria probabilităților*.

Probabilitățile din spatele morții și impozitelor

Romancierul englez Daniel Defoe (1660–1731), cunoscut mai ales pentru romanul său de aventuri *Robinson Crusoe*, este și autorul unei cărți despre supranatural intitulată *The Political History of the Devil* (*Istoria politică a diavolului*). Acolo, Defoe, care vedea peste tot dovezi ale acțiunilor diavolului, scrie: „Poți să ai încredere mai curând în lucruri sigure precum moartea și impozitele.“ Benjamin Franklin (1706–1790) pare să fi fost și el de aceeași părere. Într-o scrisoare pe care i-o scria, la optzeci și trei de ani, fizicianului francez Jean-Baptiste Leroy, spunea: „Constituția noastră funcționează. Totul pare să promită că lucrurile vor dura; dar în lumea asta nimic nu e sigur, în afară de moarte și de impozite.“ Într-adevăr, cursul vieții noastre pare imprevizibil, supus dezastrelor naturale și vulnerabil în fața greșelilor omenești, influențat de pura întâmplare. Propoziții de tipul „shit *happens*“ ([…] *se întâmplă*) sunt folosite tocmai pentru a exprima vulnerabilitatea noastră față de neașteptat și incapacitatea noastră de a controla șansa. În pofida acestor obstacole, și poate tocmai din pricina provocării, matematicienii, specialiștii în științele sociale și biologii au încercat încă din secolul XVI să abordeze metodic

incertitudinile. După întemeierea mecanicii statistice și odată ce au înțeles că înseși fundamentele fizicii – în forma mecanicii cuantice – se bazează pe incertitudine, fizicienii secolelor XX și XXI li s-au alăturat. Arma pe care cercetătorii o folosesc pentru a combate absența determinismului riguros este capacitatea de a calcula șansele unui anume deznodământ. Neputând prezice un rezultat, cel mai bun lucru care rămâne de făcut este calculul probabilității diferitelor consecințe. Instrumentele create pentru a îmbunătăți estimările și speculațiile – statistica și teoria probabilităților – constituie fundamentul nu numai pentru o mare parte a științei moderne, ci și pentru o gamă largă de activități sociale, de la economie la sport.

Folosim cu toții probabilitățile și statistica pentru aproape orice hotărâre pe care o luăm, uneori subconștient. De pildă, probabil nu știți că numărul de victime al accidentelor de automobil din SUA, în 2004, a fost de 42 636. Totuși, dacă acest număr ar fi fost, să spunem, de 3 milioane, sunt sigur că ați fi aflat. Mai mult, cunoașterea acestui număr v-ar fi făcut să vă gândiți de două ori înainte de a vă urca în mașină dimineața. De ce ne dau aceste date despre victimele șoselei o oarecare încredere în hotărârea de a conduce? După cum vom vedea curând, un ingredient-cheie al veridicității lor este faptul că se bazează pe numere foarte mari. Numărul de victime în Frio Town, Texas, cu o populație de patruzeci și nouă de persoane în 1969, n-ar putea fi la fel de convingător. Probabilitățile și statistica sunt printre cele mai importante săgeți pentru arcurile economiștilor, consilierilor politici, geneticienilor, companiilor de asigurări și ale oricui încearcă să distileze concluzii semnificative din cantități imense de date. Când spunem că matematica a pătruns până și în disciplinele neincluse inițial între științele exacte, ne referim adesea la ferestrele deschise de teoria probabilităților și statistică. Cum au apărut aceste fertile domenii?

Statistica – termen derivat din italiană: *stato* (stat) și *statista* (persoană care se ocupă cu afaceri de stat) – s-a mărginit la început la simpla colectare a datelor de către funcționarii guvernamentali.

(9)

The Diſeaſes, and Caſualties this year being 1632.

Abortive, and Stilborn	445	Jaundies	43
Affrighted	1	Jawfalu	8
Aged	628	Impoſtume	74
Ague	43	Kil'd by ſeveral accidents	46
Apoplex, and Meagrom	17	King's Evil	38
Bit with a mad dog	1	Lethargie	2
Bleeding	3	Livergrown	87
Bloody flux, ſcowring, and flux	348	Lunatique	5
Bruſed, Iſſues, ſores, and ulcers,	28	Made away themſelves	15
Burnt, and Scalded	5	Meaſles	80
Burſt, and Rupture	9	Murthered	7
Cancer, and Wolf	10	Over-laid, and ſtarved at nurſe	7
Canker	1	Palſie	25
Childbed	171	Piles	1
Chriſomes, and Infants	2268	Plague	8
Cold, and Cough	55	Planet	13
Colick, Stone, and Strangury	56	Pleuriſie, and Spleen	36
Conſumption	1797	Purples, and ſpotted Feaver	38
Convulſion	241	Quinſie	7
Cut of the Stone	5	Riſing of the Lights	98
Dead in the ſtreet, and ſtarved	6	Sciatica	1
Dropſie, and Swelling	267	Scurvey, and Itch	9
Drowned	34	Suddenly	62
Executed, and preſt to death	18	Surfet	86
Falling Sickneſs	7	Swine Pox	6
Fever	1108	Teeth	470
Fiſtula	13	Thruſh, and Sore mouth	40
Flocks, and ſmall Pox	531	Tympany	13
French Pox	12	Tiſſick	34
Gangrene	5	Vomiting	1
Gout	4	Worms	27
Grief	11		

Chriſtened { Males 4994, Females 4590, In all 9584 } Buried { Males 4932, Females 4603, In all 9535 } Whereof, of the Plague 8

Increaſed in the Burials in the 122 Pariſhes, and at the Peſthouſe this year 591
Decreaſed of the Plague in the 122 Pariſhes, and at the Peſthouſe this year. 266

C 7 In

Figura 32

Primul studiu serios de statistică, în sensul modern, a fost întreprins de un negustor londonez din secolul XVII. John Graunt (1620–1674) se pregătise să vândă nasturi, ace și postav. Cum slujba îi lăsa mult timp liber, Graunt studiază, pe cont propriu, latina și franceza, și începe să se intereseze de anunțurile mortuare – numărul săptămânal de morți, parohie cu parohie – publicate la Londra începând cu 1604. Publicarea acestor rapoarte avea mai

ales rostul de a trage la timp un semnal de alarmă privind epidemiile devastatoare. Folosind aceste cifre brute, Graunt a început să facă observații interesante pe care le-a publicat apoi într-o cărțulie de 85 de pagini, intitulată *Observații naturale și politice bazate pe anunțurile mortuare*. Figura 32 înfățișează un exemplu de tabel din broșura lui Graunt, în care nu mai puțin de șaizeci și trei de boli și cauze ale morții sunt enumerate în ordine alfabetică. În dedicația către președintele Societății Regale din Londra, Graunt subliniază faptul că, din moment ce lucrarea sa privește „aerul, provinciile, anotimpurile, fertilitatea, sănătatea, bolile, longevitatea și raportul dintre sex și vârstă în rândul populației", ea este de fapt un tratat de istorie naturală. Într-adevăr, Graunt a făcut mult mai mult decât să colecționeze și să prezinte datele. Studiind, de pildă, numărul mediu de botezuri și înmormântări pentru bărbați și femei la Londra și în parohia rurală Romsey din Hampshire, el a demonstrat pentru prima dată stabilitatea raportului dintre sexe la naștere. Mai precis, a descoperit că, la Londra, se nășteau treisprezece femei pentru paisprezece bărbați, iar la Romsey cincisprezece femei pentru șaisprezece bărbați. Graunt a fost precaut, cerând „să se informeze călătorii dacă este la fel în alte țări". El a mai observat și că „este o binecuvântare pentru omenire că, prin acest surplus de *bărbați*, există o barieră naturală împotriva *poligamiei*: fiindcă, într-o asemenea situație, femeile n-ar putea trăi la egalitate cu soții lor, așa cum o fac aici și acum". Astăzi se consideră că raportul între băieți și fete la naștere este de 1,05. Explicația tradițională pentru acest exces de bărbați este că Mama Natură favorizează nașterile de băieți din pricina mai marii fragilități a fetușurilor și bebelușilor de sex masculin. În paranteză fie spus, în Statele Unite și Japonia proporția bebelușilor de sex masculin a scăzut puțin începând din anii 1970.

Alt efort de pionierat al lui Graunt a fost încercarea sa de a stabili o distribuție pe vârste, sau un „tabel al vieții" pentru populația în viață, folosind datele privind decesele, în funcție de cauză. Lucrul avea o mare importanță politică, rezultând de aici numărul bărbaților care puteau lupta în război – între șaisprezece și cincizeci

și șase de ani – dintr-o populație. Riguros vorbind, Graunt nu avea suficiente informații pentru a deduce distribuția după vârstă. Aici a demonstrat însă ingeniozitate și creativitate. Iată cum prezintă estimarea pe care o face mortalității infantile:

> Pornind de la aceste anunțuri generale, prima noastră observație privind pierderile va fi că în douăzeci de ani s-au înregistrat 229 250 de decese în urma tuturor bolilor și accidentelor; 71 124 au murit de aftă, convulsii, rahitism, boli ale dinților și viermi, precum și în urma avorturilor sau în primele luni de viață, ori prin mărirea ficatului sau sufocare; ceea ce înseamnă că aproximativ 1/3 din total au murit de aceste boli, despre care presupunem că s-au abătut asupra copiilor de până la patru sau cinci ani. Au murit și de variolă, variolă porcină și pojar, precum și de viermi, fără convulsii, 12 210, din care număr presupunem, de asemenea, că 1/2 ar fi fost copii sub șase ani. Acum, considerând că 16 din cele 229 de mii au murit din cauza cumplitei năpaste care a fost ciuma, vom găsi că aproximativ treizeci și șase la sută dintre copiii concepuți au murit înainte să împlinească șase ani.

Cu alte cuvinte, Graunt a estimat mortalitatea înainte de vârsta de șase ani la (71 124 + 6 105) ÷ (229 250 – 16 000) = 0,36. Folosind argumente similare și estimări bazate pe informații, Graunt a putut estima mortalitatea la bătrânețe. În fine, a acoperit distanța dintre vârsta de șase ani și cea de șaptezeci și șase de ani printr-o ipoteză matematică privind comportarea ratei mortalității în funcție de vârstă. Chiar dacă multe dintre concluziile lui Graunt nu erau prea întemeiate, studiul său a condus la știința statisticii așa cum o cunoaștem azi. Observația sa că anumite evenimente – despre care se credea înainte că țin doar de întâmplare sau de soartă, cum sunt decesele provocate de diferite boli – prezentau de fapt o evidentă regularitate a condus către gândirea științifică și cantitativă în științele sociale.

Cercetătorii care i-au urmat lui Graunt au adoptat o parte din metodologia sa, dar au și dezvoltat statistica din punct de vedere matematic. Surprinzător poate, savantul care a adus cele mai mari îmbunătățiri tabelului speranței de viață întocmit de Graunt a fost astronomul Edmond Halley – acela care l-a convins pe Newton să-și publice *Principiile*. De ce era toată lumea atât de interesată de tabelele speranței de viață? În parte pentru că acesta era, și este încă, baza asigurărilor de viață. Companiile de asigurări (și cei care se căsătoresc pentru bani!) își pun probleme de tipul: dacă un om trăiește până la șaizeci de ani, care e probabilitatea să ajungă la optzeci de ani?

Pentru a întocmi tabelul speranței de viață, Halley a folosit registre detaliate păstrate în orașul Breslau (Wrocław) din Silezia începând cu sfârșitul secolului XVI. Un pastor din Breslau, Caspar Neumann, folosise aceste liste pentru a înlătura din parohia sa superstițiile potrivit cărora sănătatea e influențată de fazele lunii sau de vârste divizibile cu șapte și nouă. În cele din urmă, lucrarea lui Halley, purtând titlul cam lung *O estimare a gradelor de mortalitate în rândul populației, extrasă din detaliatele tabele de nașteri și înmormântări din orașul Breslau și însoțită de o încercare de a evalua prețul rentelor viagere*, a devenit baza matematicii asigurărilor de viață. Pentru a vă face o idee despre felul în care evaluează șansele companiile de asigurări, să examinăm tabelul speranței de viață de mai jos, întocmit de Halley:

Tabelul arată, de pildă, că, din 710 persoane în viață în vârstă de șase ani, 346 erau încă în viață la vârsta de cincizeci de ani. Apoi, se poate lua raportul 346/710 sau 0,49 ca estimare a probabilității ca o persoană în vârstă de șase ani să trăiască până la vârsta de cincizeci de ani. În mod asemănător, din 242 persoane în vârstă de șaizeci de ani, 41 mai erau în viață la optzeci de ani. Probabilitatea de a supraviețui de la șaizeci la optzeci de ani poate fi atunci estimată la 41/242, adică aproximativ 0,17. Logica din spatele acestei metode e simplă. Ea se bazează pe experiența trecută pentru a determina probabilitatea diverselor evenimente viitoare. Dacă eșantionul pe care se bazează predicția e suficient

VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE	VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE	VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE
1	1000	11	653	21	592
2	855	12	646	22	586
3	798	13	640	23	579
4	760	14	634	24	573
5	732	15	628	25	567
6	710	16	622	26	560
7	692	17	616	27	553
8	680	18	610	28	546
9	670	19	604	29	539
10	661	20	598	30	531
VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE	VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE	VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE
31	523	41	436	51	335
32	515	42	427	52	324
33	507	43	417	53	313
34	499	44	407	54	302
35	490	45	397	55	292
36	481	46	387	56	282
37	472	47	377	57	272
38	463	48	367	58	262
39	454	49	357	59	252
40	445	50	346	60	242
VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE	VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE	VÂRSTA CURENTĂ	PERSOANE
61	232	71	131	81	34
62	222	72	120	82	28
63	212	73	109	83	23
64	202	74	98	84	20
65	192	75	88		
66	182	76	78		
67	172	77	68		
68	162	78	58		
69	152	79	49		
70	142	80	41		

de mare (tabelul lui Halley se baza pe o populație de aproximativ 34 000) și dacă anumite ipoteze sunt valabile (de pildă aceea că mortalitatea e constantă în timp), atunci probabilitățile calculate sunt destul de fiabile. Iată cum prezintă Jakob Bernoulli această problemă:

> Care muritor, mă întreb, poate stabili numărul bolilor, socotind toate cazurile posibile care afectează corpul omenesc în fiecare parte a sa și la fiecare vârstă, și poate spune cu cât e mai probabil ca o boală să fie fatală decât alta […] și pe ce bază se poate face o predicție asupra relației dintre viață și moarte la generațiile viitoare?

După ce trage concluzia că acest lucru și previziuni similare „depind de factori complet obscuri care ne înșală permanent simțurile prin nesfârșita complexitate a relațiilor dintre ei", Bernoulli propune și el o abordare statistică/probabilistică:

> Există însă o altă cale care ne va conduce spre ceea ce căutăm și ne va permite cel puțin să stabilim a posteriori ceea ce nu putem determina a priori, adică să stabilim ceva pornind de la rezultate observate în numeroase cazuri asemănătoare. Trebuie presupus că, în condiții similare, apariția (sau neapariția) unui eveniment în viitor va urma același tipar observat pentru evenimente asemănătoare în trecut. De exemplu, dacă am observat că din 300 de oameni de aceeași vârstă și cu aceeași constituție ca un anume *Titius* 200 au murit, iar ceilalți au supraviețuit, putem deduce cu o siguranță rezonabilă că există de două ori mai multe șanse ca Titius să-și dea și el obștescul sfârșit în deceniul următor decât să supraviețuiască acestei perioade.

După articolele sale matematice despre mortalitate, Halley a scris un interesant text cu conotații filozofice. Iată un pasaj tulburător:

> În afara utilizărilor menționate mai sus, poate că nu e de neconceput să deducem din aceleași tabele că este incorect

> să ne plângem de scurtimea vieții noastre și să ne considerăm nedreptățiți dacă nu ajungem la bătrânețe, când de aici rezultă că jumătate dintre născuți mor înainte de șaptesprezece ani, din 1238 rămânând 616. Astfel, în loc să cârtim împotriva a ceea ce numim moarte prematură, trebuie să ne supunem cu calm și nepăsare dezintegrării, care e condiția necesară a materiei noastre perisabile și a frumoasei și fragilei noastre structuri și alcătuiri: să privim ca pe o binecuvântare faptul că am supraviețuit, poate ani mulți, acelei perioade a vieții, în timp ce jumătate din omenire nu reușește.

Dacă situația în majoritatea lumii moderne s-a îmbunătățit considerabil față de tristele statistici ale lui Halley, acest lucru nu e valabil, din nefericire, pentru toate țările. În Zambia, de pildă, mortalitatea sub vârsta de cinci ani a fost estimată în 2006 la amețitoarea cifră de 182 de morți la 1000 de nașteri. Speranța de viață în Zambia rămâne de doar treizeci și șapte de ani.

Statisticile nu se referă însă numai la moarte. Ele pătrund în toate aspectele vieții, de la caracteristicile fizice la produsele intelectuale. Unul dintre primii care au recunoscut capacitatea statisticii de a oferi „legi“ științelor sociale a fost belgianul Lambert Adolphe-Jacques Quetelet (1796–1874), un adevărat spirit universal. Lui, mai mult decât oricui, i se datorează introducerea noțiunii statistice de „om mediu“, sau ceea ce numim azi „persoană medie“.

Persoana medie

Adolphe Quetelet s-a născut pe 22 februarie 1796 în vechiul oraș belgian Gent. Tatăl său, funcționar municipal, a murit pe când Adolphe avea șapte ani. Silit să se întrețină singur de tânăr, Quetelet începe să predea matematica la vârsta de șaptesprezece ani. În timpul liber compune poezii, scrie libretul unei opere, participă la compunerea a două piese de teatru și traduce câteva opere literare.

Matematica rămâne însă domeniul său preferat, iar Quetelet obține diploma de doctor în științe la Universitatea din Gent. În 1820, e ales membru al Academiei Regale de Științe din Bruxelles și, în scurt timp, devine cel mai activ participant la întrunirile Academiei. Următorii ani sunt dedicați mai ales învățământului și publicării câtorva tratate de matematică, fizică și astronomie.

Quetelet obișnuia să-și înceapă cursul de istoria științei cu următoarea observație pătrunzătoare: „Cu cât avansează științele, cu atât tind să pătrundă în domeniul matematicii, care este un fel de centru către care ele converg. Putem judeca nivelul la care a ajuns o știință după ușurința, mai mare sau mai mică, cu care poate fi abordată prin calcule."

În decembrie 1823 Quetelet e trimis la Paris pe cheltuiala statului, în principal pentru a studia tehnicile de observație din domeniul astronomiei. S-a întâmplat însă ca vizita de trei luni în capitala de atunci a lumii matematice să-l îndrepte pe Quetelet într-o direcție cu totul diferită – teoria probabilităților. Cel care îi stârnește lui Quetelet un interes entuziast față de această temă este însuși Laplace. Quetelet avea să-și povestească mai târziu experiența legată de statistică și probabilități:

> Șansa, acest cuvânt misterios și de care s-a abuzat, trebuie considerată doar un văl al ignoranței noastre; este o fantomă ce exercită o dominație absolută asupra spiritului comun, deprins să considere evenimentele numai izolat, dar care se topește în fața filozofului ce îmbrățișează cu privirea un lung șir de evenimente, și a cărui înțelegere nu e distrasă de variațiuni ce dispar atunci când filozoful capătă o perspectivă suficientă pentru a sesiza legile naturii.

Importanța acestei concluzii e imensă. Quetelet neagă în esență rolul șansei și o înlocuiește cu deducția îndrăzneață (chiar dacă nedemonstrată pe de-a-ntregul) a faptului că până și fenomenele sociale au cauze, iar regularitățile prezentate de rezultatele statistice pot fi folosite pentru a descoperi legile care stau la baza ordinii sociale.

Într-o încercare de a testa abordarea statistică, Quetelet a inițiat un ambițios proiect de colectare a mii de măsurători legate de corpul uman. De pildă, a studiat distribuția măsurătorilor de circumferință a bustului pentru 5 738 de soldați scoțieni, și de înălțime pentru 100 000 de recruți francezi, trasând separat graficul frecvenței cu care apărea fiecare caracteristică umană. Cu alte cuvinte, el a reprezentat grafic câți recruți aveau înălțimea cuprinsă, de pildă, între 165 cm și 170 cm, și așa mai departe. A construit apoi grafice similare legate până și de ceea ce numea caracteristici „morale", pentru care avea suficiente date. Între acestea din urmă se numărau sinucideri, căsătorii și înclinația pentru crimă. Spre surprinderea sa, Quetelet a descoperit că toate caracteristicile umane urmau ceea ce se numește acum distribuția *normală* (sau *gaussiană*, numită, oarecum nejustificat, după „prințul matematicii" Carl Friederich Gauss) în formă de clopot a frecvențelor (figura 33). Fie că era vorba de înălțime, greutate, lungime a membrelor sau chiar de însușiri intelectuale determinate, pe atunci, cu ajutorul primelor teste psihologice, același tip de curbă apărea iar și iar. Curba în sine nu era nouă pentru Quetelet – matematicienii și fizicienii o cunoșteau încă de la jumătatea secolului XVIII, iar Quetelet se familiarizase cu ea în cercetările din domeniul astronomiei –, dar asocierea acestei curbe cu caracteristicile umane era surprinzătoare. Înainte, curba fusese cunoscută sub numele de *curba erorilor*, din pricina apariției sale în toate tipurile de erori de măsurare.

Să ne imaginăm, de pildă, că vrem să măsurăm foarte precis temperatura unui lichid dintr-un vas. Putem folosi un termometru

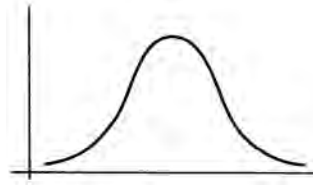


Figura 33

de mare precizie cu care să facem o mie de măsurători timp de o oră. Vom vedea că, din cauza erorilor aleatoare și a eventualelor fluctuații ale temperaturii, nu toate măsurătorile dau exact aceeași valoare. Măsurătorile se grupează în jurul unei valori centrale, unele măsurători dând valori mai mari ale temperaturii, altele valori mai mici. Dacă reprezentăm grafic de câte ori apare o valoare în funcție de acea valoare a temperaturii, obținem același tip de curbă în formă de clopot pe care Quetelet l-a găsit pentru caracteristicile umane. De fapt, cu cât este mai mare numărul de măsurători ale unei mărimi fizice, cu atât distribuția de frecvențe obținută va fi mai apropiată de curba normală. Consecința imediată a acestui fapt în problema „imprevizibilei eficacități a matematicii" e spectaculoasă în sine – până și greșelile umane ascultă de reguli matematice stricte.

Quetelet a tras de aici concluzii și mai îndrăznețe. El privea faptul că trăsăturile umane urmau curba erorii ca pe un indiciu că „omul mediu" era un tip pe care natura încerca să-l producă. Potrivit lui Quetelet, la fel cum erorile de fabricație generează o distribuție de lungimi în jurul lungimii medii (corecte) a unui cui, erorile naturii sunt distribuite în jurul unui tip biologic preferat. El afirma că membrii unei națiuni se grupau în jurul mediei lor „ca și cum ar fi rezultatul unor măsurători efectuate asupra aceluiași individ, dar cu instrumente suficient de grosolane pentru a justifica dimensiunile variațiilor".

Evident, speculațiile lui Quetelet mergeau prea departe. Dacă descoperirea faptului că trăsăturile biologice (fizice sau mentale) sunt distribuite conform curbei normale de frecvențe a fost extrem de importantă, aceasta nu putea fi considerată o dovadă a intențiilor naturii, nici variațiile individuale nu puteau fi tratate ca simple greșeli. Quetelet a determinat că înălțimea medie a recrutului francez era de 163 cm. La limita inferioară a găsit însă un bărbat de 43 de cm. Desigur, nimeni nu putea face o eroare de 120 de cm în măsurarea unui om de 163 de cm.

Ignorând ideea lui Quetelet de „lege" care acționează pentru a modela oamenii după un tipar unic, faptul că o diversitate de

trăsături, de la înălțime la nivelul coeficientului de inteligență, urmează curba normală este în sine remarcabil. Iar dacă acest lucru nu e de ajuns, chiar și distribuția loviturilor la baseball este, cu bună aproximație, normală, ca și randamentul anual al indicilor bursieri. Într-adevăr, distribuțiile care se abat de la curba normală cer uneori o cercetare atentă. De pildă, dacă s-ar observa că distribuția notelor la engleză într-o școală nu este normală, acest lucru ar provoca o anchetă asupra procedeelor de acordare a notelor în acea școală. Asta nu înseamnă că toate distribuțiile sunt normale. Distribuția lungimii cuvintelor folosite de Shakespeare în piesele sale nu este normală. El a folosit mai multe cuvinte de trei și patru litere decât cuvinte de unsprezece și douăsprezece litere. Venitul anual pe familie în Statele Unite este și el reprezentat de o distribuție diferită de cea normală. În 2006, de pildă, cele mai bogate 6,37% dintre familii dețineau aproximativ o treime din totalul veniturilor. Acest fapt conduce la o întrebare interesantă în sine: dacă atât caracteristicile fizice, cât și cele intelectuale (despre care se presupune că determină potențialul pentru câștigarea veniturilor) ale oamenilor sunt normal distribuite, de ce nu este și venitul normal distribuit? Răspunsul la asemenea întrebări socio-economice depășește însă cadrul acestei cărți. Din perspectiva noastră limitată, uimitor e faptul că toate particularitățile fizice măsurabile ale oamenilor sau ale plantelor și animalelor (de orice specie) sunt distribuite conform unui singur tip de funcție matematică.

Caracteristicile umane au servit nu numai ca bază de studiu pentru distribuțiile statistice de frecvență, dar și pentru stabilirea conceptului matematic de *corelație*. Corelația dă măsura în care schimbările valorii unei variabile sunt însoțite de schimbări ale unei alte variabile. De pildă, ne putem aștepta ca femeile mai înalte să poarte la încălțăminte un număr mai mare. În mod asemănător, psihologii au găsit o corelație între inteligența părinților și măsura în care copiii acestora reușesc la școală.

Ideea de corelație devine foarte utilă în acele situații în care nu există o dependență funcțională precisă între cele două variabile. Să ne închipuim, de pildă, că una dintre variabile este temperatura

maximă diurnă din sudul Arizonei, iar cealaltă este numărul de incendii de pădure din acea regiune. Pentru o valoare dată a temperaturii, nu se poate prezice exact numărul de incendii care vor izbucni, căci el depinde și de alte variabile, precum umiditatea și numărul incendiilor provocate de oameni. Cu alte cuvinte, pentru orice valoare a temperaturii, pot exista mai multe numere corespunzătoare de incendii de pădure, și viceversa. Totuși, noțiunea matematică numită coeficient de corelație ne permite să măsurăm cantitativ ponderea relației dintre două astfel de variabile.

Cel care a introdus conceptul de coeficient de corelație a fost geograful, meteorologul, antropologul și statisticianul din epoca victoriană Sir Francis Galton (1822–1911). Galton – care era de altfel văr cu Charles Darwin – nu avea studii de matematică. Fiind un om extrem de practic, lăsa de obicei punerea la punct a conceptelor sale inovatoare în seama unor matematicieni – mai ales a statisticianului Karl Pearson (1857–1936). Iată cum explica Galton noțiunea de corelație:

> Lungimea antebrațului este corelată cu statura, pentru că un antebraț lung implică de obicei o persoană înaltă. Dacă există o corelație strânsă între acestea două, un antebraț foarte lung va implica de regulă o statură foarte înaltă, dar, dacă nu există o corelație foarte strânsă, un antebraț foarte lung va fi, în medie, asociat doar cu o statură înaltă, nu cu una foarte înaltă; iar dacă nu există *nici o corelație*, un antebraț foarte lung nu va fi asociat cu nici o statură în mod special, și deci, în medie, va fi asociat cu o înălțime obișnuită.

Pearson a dat în cele din urmă o definiție matematică precisă a coeficientului de corelație. Coeficientul se definește astfel încât, atunci când corelația e foarte puternică – adică atunci când o variabilă urmează îndeaproape tendința de creștere și scădere a celeilalte –, coeficientul ia valoarea 1. Pentru două cantități *anticorelate* – adică, atunci când una crește, cealaltă scade și viceversa –, coeficientul este egal cu –1. Două variabile care se comportă ca și cum cealaltă nici n-ar exista au un coeficient de corelație nul.

(De pildă, comportarea anumitor guverne indică, din păcate, o corelație aproape zero cu dorințele poporului pe care se presupune că-l reprezintă.)

Cercetarea medicală și previziunile economice moderne depind în mod crucial de identificarea și calculul corelațiilor. Legătura dintre fumat și cancerul de plămâni sau dintre expunerea la soare și cancerul de piele, de pildă, au fost stabilite inițial prin descoperirea și evaluarea corelațiilor. Analiștii bursieri încearcă mereu să găsească și să cuantifice corelațiile dintre comportarea pieței și alte variabile; orice descoperire de acest gen poate fi extrem de profitabilă.

După cum au înțeles repede unii dintre primii statisticieni, atât colectarea datelor statistice, cât și interpretarea lor poate fi foarte dificilă și trebuie mânuită cu cea mai mare atenție. Un pescar care folosește o plasă cu găuri de 20 de cm poate fi tentat să creadă că toți peștii au peste 20 de cm, numai pentru că cei mai mici scapă de plasa sa. Acesta e un exemplu de efect al selecției – tendințe preferențiale în rezultate apărute fie din cauza aparatului folosit pentru colectarea datelor, fie din cauza metodologiei folosite pentru a le analiza. Eșantionarea prezintă o altă problemă. De pildă, sondajele de opinie moderne nu chestionează, de obicei, mai mult de câteva mii de persoane. Cum pot organizatorii sondajelor să fie siguri că părerile exprimate de membrii eșantionului reprezintă corect opiniile a sute de milioane de persoane? De asemenea, corelația nu implică în mod necesar cauzalitatea. Vânzările de noi prăjitoare de pâine pot crește în același timp cu participarea la concertele de muzică clasică, dar asta nu înseamnă că prezența în casă a unui nou prăjitor de pâine face să sporească dragostea de muzică. Ambele efecte se pot datora mai curând creșterii economice.

În ciuda acestor importante precauții, statistica a devenit unul dintre cele mai eficace instrumente din societatea modernă, introducând literalmente cuvântul „știință“ în științele sociale. Dar cum se face că statistica funcționează? Răspunsul e dat de matematica *probabilităților*, care domnește peste multe aspecte ale vieții moderne. Inginerii care încearcă să hotărască ce dispozitiv

de securitate să instaleze pe o navetă spațială, fizicienii din domeniul fizicii particulelor elementare care analizează rezultatele unui experiment dintr-un accelerator, psihologii care clasează copiii după testele de inteligență, companiile farmaceutice care evaluează eficiența noilor medicamente și geneticienii care studiază ereditatea umană, toți trebuie să folosească teoria matematică a probabilităților.

Jocuri de noroc

Studiul serios al probabilităților a avut începuturi modeste – încercările jucătorilor de a-și corela pariurile cu șansele de reușită. La jumătatea secolului XVII, un nobil francez – Cavalerul de Méré –, care era și un reputat jucător, a adresat o serie de întrebări legate de jocurile de noroc faimosului matematician și filozof francez Blaise Pascal (1623–1662). Acesta din urmă a purtat în 1654 o amplă corespondență în legătură cu aceste probleme cu celălalt mare matematician francez al epocii, Pierre de Fermat (1601–1665). În esență, teoria probabilităților s-a născut din această corespondență.*

Vom studia acum unul dintre exemplele analizate de Pascal într-o scrisoare datată 29 iulie 1654. Imaginați-vă doi nobili jucând o partidă care implică aruncarea unui singur zar. Fiecare jucător pune pe masă treizeci și doi de pistoli de aur. Primul jucător alege numărul 1, al doilea alege numărul 5. De fiecare dată când apare numărul ales de unul dintre jucători, jucătorul primește un punct. Câștigă cel care ajunge primul la trei puncte. Să presupunem că după un timp numărul 1 a apărut de două ori (astfel încât jucătorul care a ales acest număr are două puncte), iar numărul 5 numai o dată (astfel că adversarul are numai un punct). Dacă, dintr-un motiv oarecare, partida e întreruptă în acel moment, cum trebuie împărțiți între cei doi jucători cei șaizeci și patru de pistoli puși în

* Despre corespondența Pascal–Fermat și nașterea teoriei probabilităților, vezi cartea lui Keith Devlin *Partida neterminată* (Humanitas, București, 2010). (*N. t.*)

joc? Pascal și Fermat au găsit răspunsul logic din punct de vedere matematic. Dacă jucătorul care avea două puncte ar câștiga la următoarea aruncare, cei șaizeci și patru de pistoli i-ar reveni. Dacă celălalt jucător ar câștiga la următoarea aruncare, fiecare jucător ar avea două puncte, iar astfel fiecare ar primi treizeci și doi de pistoli. Prin urmare, dacă jucătorii s-ar despărți fără să mai arunce o dată zarurile, primul jucător ar putea susține cu dreptate: „Sunt sigur de treizeci și doi de pistoli chiar dacă pierd la această aruncare, cât despre ceilalți treizeci și doi de pistoli, poate că trebuie să-mi revină mie sau poate că trebuie să-ți revină ție; șansele sunt egale. Să împărțim atunci în mod egal acești treizeci și doi de pistoli, și dă-mi și cei treizeci și doi de pistoli de care sunt sigur.“ Cu alte cuvinte, primul jucător ar trebui să primească patruzeci și opt de pistoli, iar celălalt șaisprezece pistoli. Pare greu de crezut că o disciplină matematică nouă și profundă s-a ivit din acest tip de discuție banală. Acesta și este motivul pentru care eficacitatea matematicii e atât de „imprevizibilă“ și de misterioasă.

Esența teoriei probabilităților poate fi înțeleasă pornind de la următoarele fapte simple. Nimeni nu poate prezice cu certitudine ce față a unei monede aruncate în aer va apărea la aterizarea ei. Chiar dacă a ieșit cap de zece ori la rând, acest fapt nu îmbunătățește câtuși de puțin capacitatea noastră de a prezice rezultatul următoarei aruncări. Putem spune însă cu certitudine că, dacă aruncăm moneda de zece milioane de ori, vom obține cap aproape în jumătate din cazuri. De fapt, la sfârșitul secolului XIX, statisticianul Karl Pearson a avut răbdarea să arunce moneda de 24 000 de ori. A obținut cap de 12 012 ori. Într-un fel, despre asta e vorba în teoria probabilităților. Teoria probabilităților ne oferă informații precise despre un ansamblu de rezultate ale unui număr mare de experimente; ea nu poate niciodată prezice rezultatul unui experiment anume. Dacă un experiment poate produce n rezultate, fiecare cu aceeași șansă de realizare, atunci probabilitatea fiecărui rezultat este $1/n$. La aruncarea unui zar obișnuit, probabilitatea de a obține 4 este 1/6, pentru că zarul are șase fețe, iar fiecare față constituie un rezultat egal probabil. Să presupunem că zarul este

aruncat de șapte ori la rând și că de fiecare dată se obține 4, care este atunci probabilitatea de a obține 4 la o nouă aruncare? Teoria probabilităților dă un răspuns limpede: probabilitatea este tot de 1/6 – zarul nu are memorie, și ideea că ești „în mână“ sau că următoarea aruncare trebuie să compenseze dezechilibrul anterior nu sunt decât mituri. Adevărat este că, dintr-un milion de aruncări, rezultatele s-ar stabiliza în medie, iar 4 ar apărea cam într-o șesime din cazuri.

Să studiem acum o situație ceva mai complexă. Să presupunem că sunt aruncate simultan trei monede. Care e probabilitatea de a obține două pajuri și un cap? Putem afla răspunsul enumerând pur și simplu toate rezultatele posibile. Dacă notăm capul cu „C“ și pajura cu „P“, avem opt rezultate posibile: PPP, PPC, PCP, PCC, CPP, CPC, CCP, CCC. Dintre acestea, trei sunt favorabile evenimentului „două pajuri și un cap“. Prin urmare, probabilitatea acestui eveniment este de 3/8. Sau, mai general, dacă din n rezultate egal probabile, m sunt favorabile evenimentului care ne interesează, atunci probabilitatea acelui eveniment este de m/n. De remarcat că de aici rezultă că probabilitatea ia întotdeauna o valoare între zero și unu. Dacă evenimentul care ne interesează este de fapt imposibil, atunci $m = 0$ (nici un rezultat nu e favorabil), iar probabilitatea este zero. Dacă, pe de altă parte, un eveniment este absolut cert, înseamnă că toate evenimentele sunt favorabile ($m = n$), iar probabilitatea este atunci $n/n = 1$. Exemplul celor trei monede demonstrează încă un rezultat important al teoriei probabilităților – în cazul mai multor evenimente complet *independente* între ele, probabilitatea de realizare a tuturor evenimentelor este produsul probabilităților individuale. De pildă, probabilitatea de a obține trei capete este de 1/8, adică produsul celor trei probabilități de a obține cap pentru fiecare dintre cele trei monede: $1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/8$.

Bine, puteți spune, dar în afara cazinourilor și a altor activități legate de jocurile de noroc, la ce pot folosi aceste noțiuni elementare de probabilitate? E greu de crezut, dar aceste aparent

nesemnificative legi ale probabilităților se află în centrul geneticii moderne – știința moștenirii însușirilor biologice.

Cel care a introdus probabilitățile în genetică a fost un călugăr morav. Gregor Mendel (1822–1884) s-a născut într-un sat lângă granița dintre Moravia și Silezia (astăzi Hynčice în Republica Cehă). După intrarea în mânăstirea augustiniană Sf. Toma din Brno, studiază zoologia, botanica, fizica și chimia la Universitatea din Viena. Întors la Brno, începe o perioadă activă de experiențe cu mazăre, primind sprijin din partea starețului mânăstirii. Mendel își concentrează cercetările asupra mazării pentru că este o plantă ușor de cultivat și pentru că posedă atât organe de reproducere masculine, cât și feminine. În consecință, mazărea se poate autopoleniza sau încrucișa cu altă plantă. Prin polenizarea încrucișată a plantelor care produc numai semințe verzi cu plante care produc numai semințe galbene, Mendel obține rezultate care par foarte încurcate la prima vedere (figura 34). Prima generație de vlăstare avea numai semințe galbene, dar următoarea generație avea mereu un raport de 3:1 între semințele galbene și cele verzi! Din aceste descoperiri surprinzătoare Mendel a tras trei concluzii care au devenit piatra de temelie a geneticii:

1. Moștenirea unei caracteristici implică transmiterea anumitor „factori“ (numiți astăzi *gene*) de la părinți la urmași.
2. Fiecare urmaș moștenește un asemenea „factor“ de la fiecare părinte (pentru orice trăsătură dată).
3. O caracteristică dată poate să nu se manifeste la un urmaș, dar poate fi transmisă mai departe la următoarea generație.

Dar cum pot fi explicate rezultatele cantitative din experiența lui Mendel? Mendel susținea că fiecare dintre plantele-părinți trebuie să fi avut doi „factori“ identici (ceea ce numim alele, varietăți ale unei gene), fie două galbene, fie două verzi (ca în figura 35). Atunci când cei doi părinți s-au împerecheat, fiecare vlăstar a moștenit două alele diferite, câte una de la fiecare părinte (potrivit celei de-a doua reguli de mai sus). Adică fiecare sămânță-urmaș conținea o alelă galbenă și o alelă verde. Atunci de ce toată mazărea

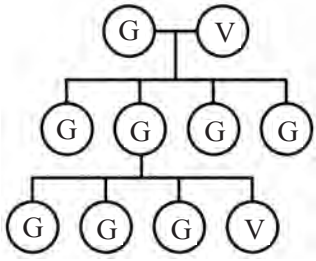


Figura 34

din această generație era galbenă? Pentru că, a explicat Mendel, galbenul era culoarea dominantă care masca prezența alelei verzi în această generație (a treia regulă de mai sus). Totuși (de asemenea potrivit celei de-a treia reguli), galbenul dominant n-a împiedicat gena recesivă verde să fie transmisă generației următoare. La următoarea împerechere, fiecare plantă conținând o alelă galbenă și o alelă verde a fost polenizată cu o altă plantă conținând aceeași combinație de alele. Cum vlăstarele conțineau o alelă de la fiecare părinte, semințele următoarei generații puteau conține una dintre următoarele combinații (figura 35): verde–verde, verde–galben, galben–verde sau galben–galben. Toate semințele cu o alelă galbenă devin mazăre galbenă, pentru că galbenul este dominant. Prin urmare, cum toate combinațiile de alele sunt egal probabile, proporția de mazăre galbenă față de cea verde ar trebui să fie de 3:1.

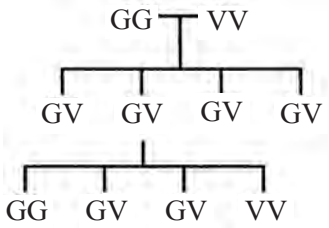


Figura 35

Ați observat poate că exercițiul lui Mendel este în esență identic cu aruncarea a două monede. Atribuind capul verdelui și pajura galbenului și punând întrebarea ce fracțiune de mazăre va fi galbenă (dat fiind că galbenul este dominant în determinarea culorii), ne regăsim exact în situația în care ne întrebam care e probabilitatea de a obține cel puțin o pajură la aruncarea a două monede. Aceasta este clar 3/4, deoarece trei dintre rezultatele posibile (pajură–pajură, pajură–cap, cap–pajură, cap–cap) conțin pajură. De unde rezultă că raportul dintre numărul de aruncări care conțin cel puțin o pajură față de numărul de aruncări care nu o conțin trebuie să fie (pe termen lung) 3:1, exact ca în experiența lui Mendel.

Mendel a publicat articolul „Experiențe asupra hibridizării plantelor“ în 1865 (și a și prezentat rezultatele la două întruniri științifice), dar rezultatele sale au trecut în mare măsură neobservate, până când au fost redescoperite la începutul secolului XX. Deși există anumite îndoieli legate de precizia rezultatelor, se consideră în genere că Mendel este cel care a pus genetica modernă pe baze matematice. Urmând calea deschisă de Mendel, marele statistician britanic Ronald Aylmer Fisher (1890–1962) a întemeiat genetica populației – o ramură a matematicii care se ocupă de modelarea distribuției genelor într-o populație și de calculul modului în care se modifică în timp frecvențele genelor. Geneticienii de azi pot folosi eșantionări statistice combinate cu studii de ADN pentru a prezice caracteristicile probabile ale descendenților nenăscuți. Și totuși, cât de înrudite sunt probabilitățile și statistica?

Fapte și previziuni

Oamenii de știință care își propun să descifreze evoluția universului încearcă de regulă să atace problema de la ambele capete. Unii pornesc de la cele mai mici neomogenități ale materiei cosmice din universul primordial, alții studiază universul actual în toate detaliile lui. Primii folosesc simulări laborioase pe calculator, în tentativa de a reconstitui evoluția în timp a universului. Ceilalți

fac o muncă de detectiv încercând să deducă trecutul universului dintr-o multitudine de fapte legate de starea lui actuală. Raportul dintre teoria probabilităților și statistică e asemănător. În teoria probabilităților, variabilele și starea inițială sunt cunoscute, iar scopul este de a prezice rezultatul cel mai probabil. În statistică, rezultatul e cunoscut, dar nu și cauzele din trecut.

Să luăm un exemplu simplu privind felul în care două câmpuri se completează reciproc și se întâlnesc, așa-zicând, la mijloc. Putem porni de la faptul că studiile statistice arată că măsurătorile unui spectru larg de mărimi fizice și chiar numeroase caracteristici umane se distribuie potrivit *curbei normale de frecvențe*. Mai exact, curba normală nu este e curbă unică, ci o familie de curbe, toate descrise de aceeași funcție generală, și toate determinate complet de numai două mărimi matematice. Prima dintre aceste mărimi – *media* – este valoarea centrală în jurul căreia distribuția e simetrică. Valoarea reală a mediei depinde, evident, de tipul de variabilă măsurată (de pildă, greutate, înălțime sau IQ). Chiar și pentru aceeași variabilă, media poate fi diferită pentru populații diferite. De pildă, media înălțimii bărbaților din Suedia este probabil diferită de media înălțimii bărbaților din Peru. A doua mărime care definește curba normală se numește *abaterea standard*. Aceasta arată cât de strâns se grupează datele în jurul valorii medii. În figura 36, curba normală (a) are cea mai mare abatere standard, pentru că valorile sunt mai împrăștiate. Aici intervine însă un aspect interesant. Folosind calculul integral pentru a determina ariile suprafețelor de sub curbă, se poate demonstra matematic că, indiferent de valoarea mediei sau a deviației standard, 68,2% dintre date se află în intervalul centrat pe medie și având lărgimea de două abateri standard (ca în figura 37). Cu alte cuvinte, dacă media IQ-ului unei populații (numeroase) este de 100, iar abaterea standard este de 15, atunci 68,2% dintre indivizii populației au IQ-ul cuprins între 85 și 115. Mai mult, pentru toate curbele normale de frecvență, 95,4% din populație are IQ-ul între 70 și 130, iar 99,7% între 55 și 145.

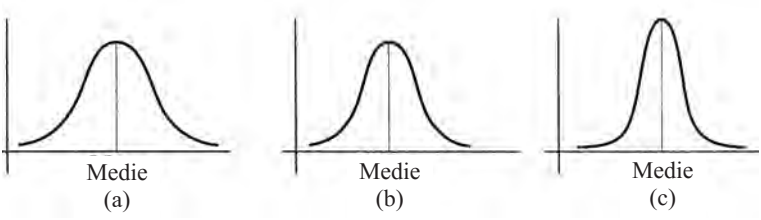


Figura 36

Să presupunem acum că vrem să prezicem probabilitatea ca o persoană aleasă la întâmplare din acea populație să aibă IQ-ul între 85 și 100. Figura 37 ne spune că probabilitatea este 0,341 (sau 34,1%), deoarece, potrivit teoriei probabilităților, probabilitatea este egală cu numărul rezultatelor favorabile împărțit la numărul total de posibilități. Sau ne-ar putea interesa să aflăm care e probabilitatea ca cineva (ales la întâmplare din populație) să aibă IQ-ul mai mare de 130. O privire aruncată asupra figurii 37 ne arată că probabilitatea este de numai 0,022, sau 2,2%. În mod asemănător, folosind proprietățile distribuției normale și calculul integral (pentru a determina ariile suprafețelor), se poate calcula probabilitatea ca valoarea IQ-ului să se afle în orice interval dat. Cu alte cuvinte, teoria probabilităților și statistica se combină pentru a ne da răspunsul.

După cum am remarcat deja, probabilitățile și statistica au sens doar atunci când avem de-a face cu un număr mare de evenimente – niciodată cu evenimente individuale. Această observație capitală, cunoscută ca *legea numerelor mari*, i se datorează lui Jakob Bernoulli, care a formulat-o ca o teoremă în cartea sa *Ars conjectandi* (*Arta de a emite ipoteze*; figura 38 prezintă pagina de gardă a cărții). Simplu spus, teorema afirmă că, dacă probabilitatea de apariție a unui eveniment este p, atunci p este cel mai probabil raport între numărul de apariții ale evenimentului și numărul total de încercări. În plus, atunci când numărul de încercări tinde către infinit, raportul tinde către p. Iată cum prezintă Bernoulli legea numerelor mari în *Ars conjectandi*: „Rămâne de cercetat dacă, sporind numărul de observații, crește și probabilitatea ca

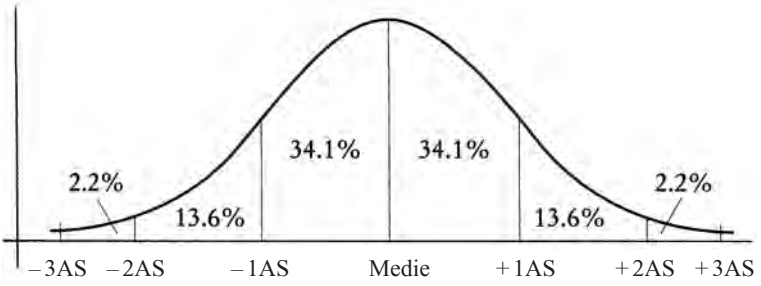


Figura 37

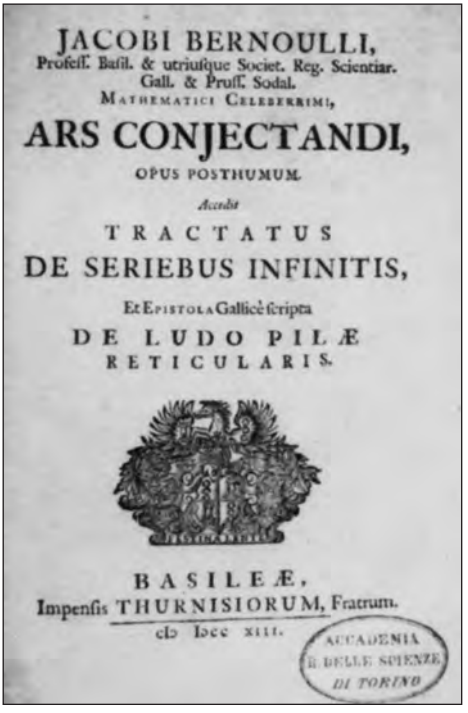

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
clɔ Iɔcc xiii.
ACCADEMIA
R. DELLE SCIENZE
DI TORINO

Figura 38

raportul înregistrat între cazurile favorabile şi cele nefavorabile să se apropie de cel adevărat, astfel încât această probabilitate să se apropie în cele din urmă oricât de mult dorim de certitudine.“ El explică apoi ideea folosind un exemplu concret:

> Avem un vas care conține 3 000 de pietricele albe şi 2 000 negre, şi vrem să determinăm pe cale empirică raportul dintre pietricele albe şi cele negre – raport pe care nu-l cunoaştem – extrăgând pietricele din vas, una după alta, şi înregistrând cât de des extragem o pietricică albă şi cât de des extragem una neagră. (Vă amintesc că o cerință importantă a acestei metode este să punem la loc fiecare pietricică, după ce am notat culoarea şi înainte de a extrage alta, astfel încât numărul pietricelor din urnă să rămână constant.) Ne punem acum întrebarea: este posibil, continuând oricât de mult încercările, să facem de 10, 100, 1000 etc. de ori mai probabil (şi, în cele din urmă, „moralmente cert“*) ca raportul dintre numărul de extrageri ale pietricelor albe şi numărul de extrageri ale pietricelor negre să ia aceeaşi valoare (3:2) ca raportul real dintre pietricelele albe şi cele negre din vas, decât ca acesta să ia o valoare diferită? Dacă răspunsul este nu, atunci recunosc că nu vom reuşi pesemne să stabilim numărul de exemplare în fiecare caz (adică, numărul de pietricele albe şi negre) prin observație. Dar dacă e adevărat că în cele din urmă ajungem la certitudinea morală pe această cale [iar Jakob Bernoulli demonstrează în următorul capitol din *Ars conjectandi* că aşa stau lucrurile] […] atunci putem determina a posteriori numărul de exemplare cu aproape aceeaşi precizie cu care le cunoşteam a priori.

Bernoulli a închinat douăzeci de ani desăvârşirii acestei teoreme, care a devenit unul dintre stâlpii de rezistență ai statisticii. El

---

* Noțiunea de „certitudine morală“ îşi are originea în ideea lui Aristotel că în viața practică nu putem atinge acelaşi nivel de certitudine ca în matematică; la Bernoulli, are înțelesul pe care îl dăm expresiei „dincolo de orice îndoială“. (*N. t.*)

încheie încredințat de existența absolută a legilor care guvernează lumea, chiar și în cazurile ce par să țină de șansă:

> Dacă toate evenimentele de-acum și până în vecii vecilor ar fi permanent observate (iar probabilitatea ar deveni astfel certitudine), s-ar vedea că toate pe lume se întâmplă din motive precise și în deplin acord cu legea, iar în felul acesta, chiar și în cazul lucrurilor ce pot părea pur accidentale, suntem obligați să presupunem existența unei anumite necesități și, așa-zicând, a destinului. După știința mea, la asta s-a gândit Platon când, în doctrina ciclului universal, a spus că, după ce se vor fi scurs nenumărate secole, totul se va întoarce la starea inițială.

Deznodământul acestei povești despre știința incertitudinii e foarte simplu: matematica se aplică chiar și în cele mai puțin „științifice" domenii ale vieții noastre – inclusiv în cele care par guvernate de pura întâmplare. Astfel, în încercarea de a explica „imprevizibila eficacitate" a matematicii, nu putem limita discuția doar la legile fizicii, ci va trebui până la urmă să înțelegem ce anume face ca matematica să fie omniprezentă.

Incredibila putere a matematicii nu l-a ocolit nici pe celebrul dramaturg și eseist George Bernard Shaw (1856–1950). Deloc faimos pentru talentele sale matematice, Shaw a scris un articol pătrunzător despre statistică și probabilități, intitulat „Viciul jocului de noroc și virtutea asigurării". În acest articol, Shaw recunoaște că, pentru el, asigurările „se întemeiază pe fapte inexplicabile și riscuri ce pot fi calculate doar de matematicienii de profesie". El face totuși următoarea observație instructivă:

> Să ne închipuim o discuție de afaceri între un negustor obsedat de comerțul pe mare, dar înspăimântat că va naufragia sau va fi mâncat de sălbatici, și un căpitan obsedat de mărfuri și pasageri. Căpitanul îi zice negustorului că bunurile vor fi în perfectă siguranță, ca și el, de altfel, dacă îl însoțește. Dar negustorul, cu gândul la tot ce-au îndurat Iona,

Sfântul Pavel, Odiseu și Robinson Crusoe, nu îndrăznește să se aventureze. Dialogul lor ar suna cam așa:

Căpitanul: Vino! Pun pariu pe cât vrei tu că, dacă navighezi cu mine, vei fi de azi într-un an teafăr și nevătămat.

Negustorul: Dar, dacă mă prind, înseamnă că pariez contra dumitale că voi fi mort de azi într-un an.

Căpitanul: De ce nu, din moment ce vei pierde negreșit pariul?

Negustorul: Dar, dacă eu mă înec, te înneci și dumneata; și-atunci ce se-alege de pariul nostru?

Căpitanul: E-adevărat. Am să găsesc însă pe cineva care va rămâne la țărm și va ține pariul cu soția și familia dumitale.

Negustorul: Atunci se schimbă lucrurile; dar cu marfa ce facem?

Căpitanul: Ooo! Putem include și marfa în pariu. Sau facem două pariuri: unul pe viața dumitale, altul pe marfă. Și una, și alta vor rămâne tefere, te asigur. Nu se va întâmpla nimic; iar dumneata vei vedea toate minunățiile de peste mări și țări.

Negustorul: Dar, dacă eu și bunurile mele ajungem cu bine la liman, va trebui să-ți plătesc prețul vieții mele și al bunurilor în afacerea asta. Dacă nu mă înec, sunt ruinat.

Căpitanul: Și asta e adevărat. Numai că eu nu stau chiar așa de bine cum îți închipui. Dacă dumneata te înneci, atunci eu mă înec primul, fiindcă trebuie să fiu ultimul care părăsește corabia când se scufundă. Și totuși, vreau să te conving să te aventurezi. Punem pariu zece contra unu. Ce zici?

Negustorul: Ah, în cazul ăsta…

Căpitanul a descoperit asigurările la fel ca aurarul băncile.

Pentru Shaw, care s-a plâns că în școală n-a auzit „nici un cuvânt despre rostul sau folosul matematicii“, această poveste plină de umor despre „istoria“ matematicii asigurărilor e remarcabilă.

Lăsând la o parte textul lui Shaw, am urmărit până acum dezvoltarea unor ramuri ale matematicii mai curând din perspectiva matematicienilor de profesie. Pentru aceştia, ca şi pentru mulți filozofi raționaliști precum Spinoza, platonismul era de la sine înțeles. Nu încăpea nici o îndoială că adevărurile matematice existau în lumea lor și că mintea umană putea avea acces la aceste adevăruri fără ajutorul observației, doar prin intermediul rațiunii. Primele semne ale unei posibile prăpastii între perceperea geometriei euclidiene ca un ansamblu de adevăruri universale şi alte ramuri ale matematicii au fost dezvăluite de filozoful irlandez George Berkeley, episcop de Cloyne (1685–1753). Într-o broșură intitulată *Analistul sau discurs adresat unui matematician incredul* (acesta fiind, se pare, Edmond Halley), Berkeley a criticat înseşi bazele calculului infinitezimal şi analizei create de Newton (în *Principia*) și Leibniz. În particular, Berkeley a demonstrat că „fluxionii“ sau ratele instantanee de schimbare, introduse de Newton, nu erau o noțiune riguros definită, ceea ce, pentru Berkeley, era de ajuns ca să pună sub semnul întrebării întregul domeniu:

> Metoda fluxionilor este cheia universală cu ajutorul căreia matematicienii moderni dezleagă tainele geometriei, și prin urmare ale naturii […]. Dar dacă această metodă e limpede sau obscură, coerentă sau contradictorie, convingătoare sau precară voi cerceta cu toată imparțialitatea şi voi supune judecății dumneavoastră, precum și a tuturor cititorilor nepărtinitori.

Observația lui Berkeley era întemeiată, iar o teorie pe deplin coerentă a analizei a fost formulată abia pe la 1960. Dar matematica va cunoaște o criză și mai gravă în secolul XIX.

Capitolul 6

Geometrii: șocul viitorului

În celebra sa carte *Șocul viitorului*, Alvin Toffler definește sintagma din titlu drept „tensiunea distrugătoare și dezorientarea cărora le cad pradă indivizii când trebuie să suporte schimbări foarte mari într-un timp foarte scurt“.* În secolul XIX, matematicienii, oamenii de știință și filozofii au trecut exact printr-un asemenea șoc. De fapt, credința milenară că matematica oferă adevăruri eterne și imuabile a fost distrusă. Această prefacere intelectuală neașteptată a fost provocată de apariția unor noi tipuri de geometrie, numite acum *geometrii neeuclidiene*. Chiar dacă majoritatea nespecialiștilor poate nici n-au auzit de geometriile neeuclidiene, importanța revoluției în gândire adusă de aceste noi ramuri ale matematicii a fost asemuită de unii cu cea declanșată de teoria darwinistă a evoluției.

Pentru a înțelege pe deplin natura acestei schimbări radicale în perspectiva asupra lumii, trebuie întâi să aruncăm o privire asupra fundalului istorico-matematic.

„Adevărul“ euclidian

Până la începutul secolului XIX, dacă exista o ramură a cunoașterii care să fie considerată culmea adevărului și certitudinii, aceea era geometria euclidiană, geometria tradițională pe care o învățăm

* Alvin Toffler, *Șocul viitorului*, Editura Politică, București, 1973. (*N. t.*)

la școală. Prin urmare, nu e surprinzător că marele filozof evreu olandez Baruch Spinoza (1632–1677) și-a intitulat îndrăzneața încercare de a uni știința, religia, etica și rațiunea *Etica demonstrată după metoda geometrică*. Mai mult, în pofida distincției clare dintre lumea ideală platoniciană a formelor matematice și realitatea fizică, majoritatea oamenilor de știință priveau obiectele geometriei euclidiene drept abstracțiunile distilate ale corespondenților lor din lumea fizică, reală. Chiar și empiriști convinși ca David Hume (1711–1776), care sublinia că fundamentele științei erau mult mai puțin sigure decât se bănuia, credeau că geometria euclidiană era solidă ca stânca Gibraltarului. În *Cercetare asupra intelectului omenesc*, Hume identifică două tipuri de adevăruri:

> Toate obiectele rațiunii sau cercetării omenești pot fi împărțite în mod firesc în două categorii, și anume: *relații între idei* și *fapte*. [Din prima categorie face parte] orice afirmație care este certă fie în mod intuitiv, fie în mod demonstrativ. […] Propozițiile din această categorie pot fi descoperite prin simple operații ale gândirii, indiferent de faptul că ceva există sau nu în univers. Chiar dacă nu ar exista vreodată în natură un cerc sau un triunghi, adevărurile demonstrate de Euclid și-ar păstra întotdeauna certitudinea și evidența ce le este proprie. Faptele […] nu sunt stabilite în același fel, iar evidența adevărului lor, oricât ar fi de mare, nu este de aceeași natură cu cea a obiectelor anterioare. Contrariul oricărui fapt este oricând posibil, deoarece el nu poate implica o contradicție […]. *Că soarele nu va răsări mâine dimineață* nu este o propoziție mai puțin inteligibilă și nu implică în mai mare măsură o contradicție decât afirmația *că el va răsări*. În zadar ne-am strădui, deci, să-i demonstrăm falsitatea.*

---

* David Hume, *Cercetare asupra intelectului omenesc*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1987. (*N. t.*)

Cu alte cuvinte, deşi Hume, la fel ca toţi empiriştii, susţinea că întreaga cunoaştere provine din observaţie, geometria şi „adevărurile“ ei continuau să se bucure de un statut privilegiat.

Marele filozof german Immanuel Kant (1724–1804) nu a fost întotdeauna de acord cu Hume, dar şi el a ridicat geometria euclidiană la rang de certitudine absolută. În *Critica raţiunii pure*, Kant a încercat să inverseze oarecum relaţia dintre intelect şi lumea fizică. În loc ca senzaţiile provenind din realitatea fizică să se imprime într-un intelect altminteri complet pasiv, Kant a atribuit intelectului funcţia activă de „construire“ şi „prelucrare“ a universului perceput. Întorcându-şi privirea spre interior, Kant s-a întrebat nu *ce* putem şti, ci *cum* putem şti ceea ce putem şti. El a arătat că, deşi ochii noştri detectează particule de lumină, acestea nu alcătuiesc o imagine de care suntem conştienţi până când informaţia nu e prelucrată şi organizată de creier. Un rol esenţial în acest proces de construcţie a fost atribuit percepţiei umane a priori, intuitivă sau sintetică, a spaţiului, care, la rândul ei, se bazează pe geometria euclidiană. Kant credea că geometria euclidiană oferă singurul mijloc valabil de prelucrare şi conceptualizare a spaţiului, iar această familiarizare intuitivă şi universală cu spaţiul se află în centrul cunoaşterii noastre privind lumea înconjurătoare. Iată cuvintele lui Kant:

> Spaţiul nu este un concept empiric care să fi fost scos din experienţe externe. […] Spaţiul este o reprezentare necesară a priori, care stă la baza tuturor intuiţiilor externe. […] Pe această necesitate a priori se întemeiază certitudinea apodictică a tuturor principiilor geometrice şi posibilitatea construcţiilor lor a priori. Dacă, în adevăr, această reprezentare a spaţiului ar fi un concept dobândit a posteriori, care ar fi scos din experienţa externă comună, primele principii ale determinării matematice n-ar fi decât percepţii. Ele ar avea deci toată contingenţa percepţiei şi nu ar fi, prin urmare, necesar ca între două puncte să fie numai o singură linie dreaptă, ci experienţa ne-ar învăţa că e totdeauna aşa.*

---

* Immanuel Kant, *Critica raţiunii pure*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969. (*N. t.*)

Pe scurt, potrivit lui Kant, dacă percepem un obiect, atunci rezultă cu necesitate că obiectul este spațial și euclidian.

Ideile lui Hume și Kant au adus în prim-plan cele două aspecte diferite, dar la fel de importante, asociate din perspectivă istorică geometriei euclidiene. Primul era afirmația că geometria euclidiană reprezenta singura descriere exactă a spațiului fizic. Al doilea era identificarea geometriei euclidiene cu o structură deductivă solidă, precisă și infailibilă. Luate împreună, aceste două proprietăți presupuse asigurau matematicienilor, oamenilor de știință și filozofilor ceea ce ei considerau a fi dovada cea mai puternică a existenței unor adevăruri bogate în consecințe și indubitabile despre univers. Până în secolul XIX, aceste afirmații erau de la sine înțelese. Dar erau ele adevărate?

Bazele geometriei euclidiene au fost puse pe la 300 î. Cr. de matematicianul grec Euclid din Alexandria. Într-o monumentală lucrare în treisprezece volume, *Elementele*, Euclid a încercat să construiască geometria pe un fundament logic bine definit. El a început cu zece axiome, pe care le-a presupus indiscutabil adevărate, și a căutat să demonstreze un număr mare de propoziții pe baza acestor postulate, folosind doar deducția logică.

Primele patru axiome euclidiene erau extrem de simple și de concise. De pildă, prima axiomă sună astfel: „Între orice două puncte se poate trasa o linie dreaptă." A patra afirmă: „Toate unghiurile drepte sunt egale." A cincea axiomă, cunoscută drept „postulatul dreptelor paralele", are însă o formulare mai complicată și nu e de la sine-înțeleasă: „Dacă două drepte aflate într-un plan intersectează o a treia dreaptă astfel încât suma celor două unghiuri interne de pe o parte a lor e mai mică decât două unghiuri drepte, atunci cele două drepte se vor intersecta inevitabil dacă sunt prelungite suficient în acea parte." Figura 39 ilustrează conținutul axiomei. Deși nimeni nu se îndoiește de adevărul acestei afirmații, ei îi lipsește frumoasa simplitate a celorlalte axiome. Toate arată că Euclid însuși nu era pe deplin mulțumit de al cincilea postulat – demonstrațiile primelor douăzeci și opt de propoziții din *Elementele* nu apelează la el. Versiunea echivalentă cea mai citată

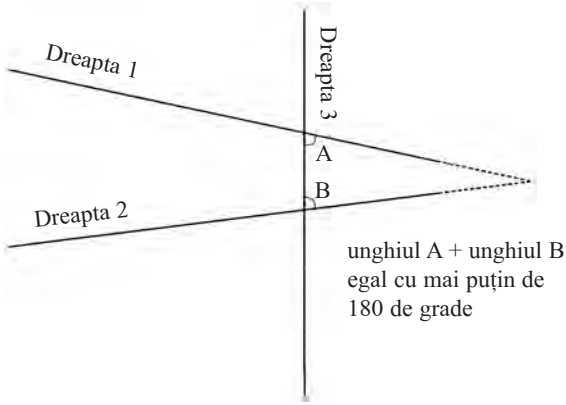


Figura 39

astăzi a postulatului a apărut prima dată în comentariile matematicianului grec Proclos din secolul V, dar e în general cunoscută ca „axioma Playfair", numită după matematicianul scoțian John Playfar (1748–1819). Aceasta afirmă: „Date fiind o dreaptă și un punct exterior dreptei, e posibil să trasăm prin acel punct o dreaptă și numai una paralelă cu dreapta dată." (vezi figura 40). Cele două versiuni ale axiomei sunt echivalente, în sensul că din axioma lui Playfair (împreună cu celelalte axiome) rezultă a cincea axiomă a lui Euclid, și reciproc.

De-a lungul secolelor, nemulțumirea față de a cincea axiomă a generat multe încercări nereușite de a o demonstra pornind de la celelalte nouă axiome sau de a o înlocui printr-un postulat evident. Când aceste tentative au eșuat, alți geometri au încercat să răspundă la tulburătoarea întrebare „ce-ar fi dacă" – ce-ar fi dacă a cincea axiomă ar fi falsă? Unele dintre aceste tentative au pus în discuție statutul axiomelor lui Euclid – erau într-adevăr de la sine-înțelese sau se întemeiau pe experiență. Surprinzătorul verdict a venit în cele din urmă în secolul XIX: noi tipuri de geometrie pot fi create *alegând* o axiomă diferită de a cincea axiomă a lui Euclid. Mai mult, aceste geometrii „neeuclidiene" puteau

descrie, în principiu, spațiul fizic la fel de bine ca geometria euclidiană!

Dați-mi voie să mă opresc aici pentru o clipă ca să lămuresc înțelesul lui „a alege“. Timp de mii de ani, geometria euclidiană a fost considerată unică și *inevitabilă* – singura descriere adevărată a spațiului. Faptul că puteam alege axiomele și obține o descriere la fel de îndreptățită a răsturnat totul. Schema deductivă sigură și atent construită a devenit brusc un fel de joc în care axiomele aveau doar rolul de reguli. Axiomele puteau fi schimbate și se obținea un nou joc. Consecințele acestei descoperiri asupra înțelegerii naturii matematicii au fost imense.

Câțiva matematicieni ingenioși au pregătit terenul pentru asaltul final asupra geometriei euclidiene. Dintre ei se remarcă preotul iezuit Girolamo Saccheri (1667–1733), care a analizat consecințele înlocuirii celui de-al cincilea postulat printr-o afirmație diferită, și matematicienii germani Georg Klügel (1739–1812) și Johann Heinrich Lambert (1728–1777), primii care au înțeles că pot exista geometrii diferite de geometria euclidiană. Cineva trebuia să bată totuși ultimul cui în sicriul ideii că geometria euclidiană era singura reprezentare a spațiului. Meritul pentru aceasta s-a împărțit între trei matematicieni, unul rus, altul maghiar, iar al treilea german.

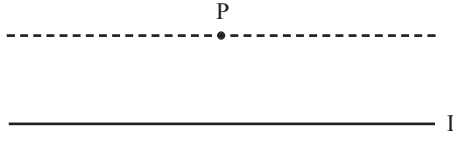


Figura 40

Stranii lumi noi

Primul care a publicat un întreg tratat despre un nou tip de geometrie – o geometrie ce putea fi construită pe o suprafață de forma unei șei (figura 41a) a fost rusul Nikolai Ivanovici Lobacevski (1792–1856; figura 42). În acest tip de geometrie (numită acum *geometrie hiperbolică*), al cincilea postulat al lui Euclid e înlocuit cu afirmația că, date fiind o dreaptă aflată într-un plan și un punct exterior dreptei, există cel puțin două drepte care trec prin acel punct și sunt paralele cu dreapta dată. Altă diferență importantă între geometria lobacevskiană și cea euclidiană este că, dacă în aceasta din urmă suma unghiurilor unui triunghi este întotdeauna de 180 de grade (figura 41b), în prima suma este întotdeauna mai mică de 180 de grade. Pentru că rezultatele lui Lobacevski au apărut în obscurul *Buletin al Universității din Kazan*, ele au trecut aproape complet neobservate până când au început să apară traduceri franceze și germane la sfârșitul anilor 1830. Fără să cunoască rezultatele lui Lobacevski, tânărul matematician maghiar János Bolyai (1802–1860) a formulat o geometrie asemănătoare în anii 1820. Plin de entuziasm juvenil, el îi scrie în 1823 tatălui său (matematicianul Farkas Bolyai; figura 43): „Am găsit lucruri atât de minunate încât am încremenit. […] Din nimic, am creat o lume nouă și diferită.“ În 1825, János putea deja să-i prezinte mai vârstnicului Bolyai prima versiune a noii sale geometrii.

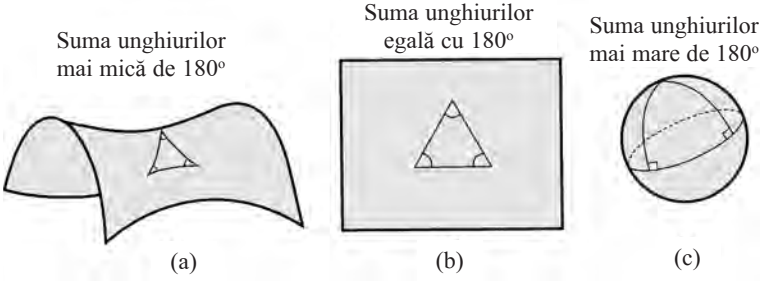


Figura 41

Figura 42

Manuscrisul se intitula *Știința absolută a spațiului*. În ciuda exuberanței tânărului, tatăl nu este pe de-a-ntregul convins de rigoarea ideilor lui János. Se hotărăște totuși să publice noua geometrie ca apendice la propriul său tratat în două volume despre bazele geometriei, algebrei și analizei (cu titlul presupus atrăgător *Eseu asupra elementelor de matematică pentru tineretul studios*). Un exemplar al cărții este trimis în iunie 1831 prietenului lui Farkas, Carl Friederich Gauss (1777–1855; figura 44), care era nu doar cel mai mare matematician al vremii, ci și, pesemne, alături de Arhimede și Newton, unul dintre primii trei matematicieni din toate timpurile. Cartea s-a rătăcit în haosul creat de o epidemie de holeră, iar Farkas a trebuit să-i trimită un al doilea exemplar. Gauss i-a răspuns pe 6 martie 1832, iar comentariile sale nu au fost tocmai cele pe care le aștepta tânărul János:

> Dacă voi începe prin a spune că nu pot lăuda lucrarea, vei fi desigur surprins preț de-o clipă. Dar nu pot spune altceva. A o lăuda, ar însemna să mă laud pe mine. Într-adevăr, întreg

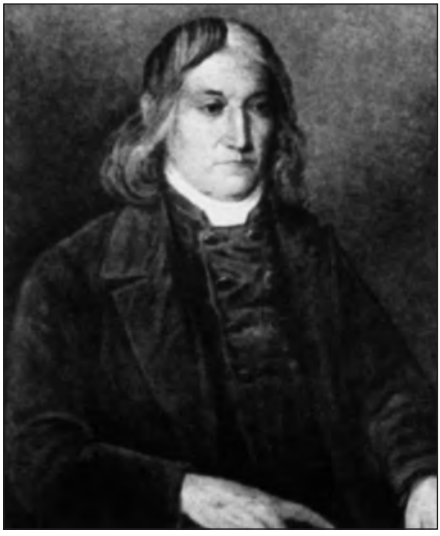


Figura 43

> conținutul lucrării, calea urmată de fiul dumitale, rezultatele la care a ajuns coincid aproape în totalitate cu gândurile care m-au muncit în ultimii treizeci sau treizeci și cinci de ani. Așa încât am rămas uimit. În ce privește propriile mele cercetări, dintre care până acum am așternut puține pe hârtie, intenția mea era să nu fie publicate în timpul vieții mele.

În paranteză fie spus, se pare că Gauss se temea că geometria sa radical nouă avea să fie privită ca o erezie filozofică de către filozofii kantieni, pe care îi numea „beoțieni“ (sinonim cu „proști“ pentru grecii antici). Gauss continuă:

> Pe de altă parte, aveam intenția de a scrie toate acestea mai târziu, ca măcar să nu piară odată cu mine. Este deci o surpriză plăcută pentru mine că sunt cruțat de acest efort, și sunt foarte bucuros că fiul vechiului meu prieten este cel care mi-a luat-o înainte într-un mod atât de strălucit.

Figura 44

Dacă pe Farkas l-au bucurat laudele lui Gauss, pe care le-a găsit „foarte delicate“, János a fost absolut distrus. Timp de aproape un deceniu a refuzat să creadă că pretenția de prioritate a lui Gauss nu era falsă, iar relația cu tatăl său (pe care îl bănuia că i-a comunicat prematur rezultatele lui Gauss) a fost foarte încordată. Când a înțeles în fine că Gauss începuse să se ocupe de problemă încă din 1799, János s-a întristat mult, iar cercetările sale matematice ulterioare (au rămas vreo douăzeci de mii de pagini de manuscris la moartea sa) au fost, prin comparație, lipsite de strălucire.

Nu încape îndoială că Gauss s-a gândit într-adevăr serios la geometria neeuclidiană. Într-o însemnare de jurnal din septembrie 1799, scria: „*In principiis geometriae egregios progressus fecimus*“ („Am făcut mari progrese în privința principiilor geometriei“). Apoi, în 1813, nota: „În teoria dreptelor paralele, nu ne aflăm acum mai departe decât Euclid. Aceasta este *la partie honteuse* [partea rușinoasă] a matematicii, care, mai devreme sau mai târziu, va trebui să îmbrace o formă foarte diferită.“ Câțiva ani mai târziu,

într-o scrisoare din 28 aprilie 1817, afirma: „Sunt tot mai convins că necesitatea geometriei noastre [euclidiene] nu poate fi demonstrată.“ În final, şi contrar lui Kant, Gauss trage concluzia că geometria euclidiană nu poate fi privită ca un adevăr universal: „geometria [euclidiană] nu trebuie aşezată alături de aritmetică, a cărei natură e apriorică, ci oarecum alături de mecanică.“ La concluzii asemănătoare ajunsese, în mod independent, Ferdinand Schweikart (1780–1859), profesor de drept, care l-a informat pe Gauss despre cercetările sale cândva în 1818 sau 1819. Cum nici Gauss, nici Schweikart nu-şi publicaseră rezultatele, prioritatea le revine conform tradiţiei lui Lobacevski şi Bolyai, chiar dacă cei doi nu pot fi consideraţi singurii „creatori“ ai geometriei neeuclidiene.

Geometria hiperbolică a fost ca o lovitură de trăsnet în lumea matematicii, demolând ideea că geometria euclidiană e singura descriere infailibilă a spaţiului. Înainte de cercetările lui Gauss–Lobacevski–Bolyai, geometria euclidiană *era* cu adevărat lumea înconjurătoare. Faptul că puteai alege un ansamblu diferit de axiome şi construi un tip diferit de geometrie a făcut să apară pentru prima dată bănuiala că matematica este, la urma urmelor, o invenţie omenească, iar nu descoperirea unor adevăruri care există independent de mintea umană. În acelaşi timp, surparea legăturii imediate dintre geometria euclidiană şi spaţiul fizic real a scos la iveală lucruri care păreau să fie neajunsuri grave ale ideii că matematica e limbajul universului.

Statutul privilegiat al geometriei euclidiene a avut încă şi mai mult de suferit atunci când Bernhard Riemann, unul dintre studenţii lui Gauss, a arătat că geometria hiperbolică nu era singura geometrie neeuclidiană posibilă. Într-o strălucită conferinţă ţinută la Göttingen pe 10 iunie 1854 (figura 45 înfăţişează prima pagină a conferinţei publicate), Riemann şi-a prezentat ideile „Despre ipotezele care stau la baza geometriei“. A început prin a spune că „geometria presupune noţiunea de spaţiu, precum şi principiile elementare pentru construcţii în spaţiu. Ea dă numai definiţii convenţionale ale acestor lucruri, în timp ce precizările esenţiale apar

sub forma axiomelor“. Totuși, observă Riemann, „relațiile dintre aceste presupoziții rămân obscure; nu știm dacă, sau în ce măsură, e necesară, sau a priori, o legătură între ele, și nici măcar dacă e posibilă vreuna“. Dintre teoriile geometrice posibile, Riemann a analizat geometria eliptică, de tipul celei întâlnite pe suprafața unei sfere (figura 41c). Se observă că, în această geometrie, cea mai scurtă distanță între două puncte nu este o linie dreaptă, ci arcul unui cerc mare al cărui centru coincide cu centrul sferei. Liniile aeriene se folosesc de acest lucru – zborurile din Statele Unite în Europa nu urmează ceea ce pare a fi, pe hartă, o linie dreaptă, ci un cerc mare orientat inițial spre nord. Este ușor de verificat că oricare două cercuri mari se intersectează în două puncte diametral opuse. De pildă, două meridiane, care la Ecuator par a fi paralele, se intersectează la cei doi poli. Prin urmare, spre deosebire de geometria euclidiană, în care există o singură dreaptă paralelă cu o alta și care trece printr-un punct exterior dat, și de geometria hiperbolică, în care există cel puțin două drepte paralele, în geometria eliptică de pe sferă *nu* există drepte paralele. Riemann a dus ideile neeuclidiene cu un pas înainte și a introdus geometrii în spații curbe cu trei, patru și chiar mai multe dimensiuni. Una dintre noțiunile esențiale elaborate de Riemann a fost cea de curbură – ritmul în care se curbează o curbă sau o suprafață. De pildă, suprafața cojii unui ou se curbează mai lent la mijloc decât la capete. Riemann a dat o definiție matematică riguroasă curburii în spații cu un număr arbitrar de dimensiuni. Astfel, el a întărit legătura dintre algebră și geometrie descoperită de Descartes. În lucrările lui Riemann, ecuațiile cu un număr arbitrar de variabile și-au găsit echivalente geometrice, iar noile noțiuni provenind din geometriile avansate au fost asociate cu ecuațiile.

Nu numai dominația euclidiană a căzut victimă noilor orizonturi ale geometriei din secolul XIX. Ideile lui Kant despre spațiu n-au mai supraviețuit nici ele mult timp. Kant afirmase că informațiile primite de la simțuri sunt organizate exclusiv după tipare euclidiene înainte de fi înregistrate în mod conștient. Geometrii din secolul XIX și-au dezvoltat repede intuiția geometriilor neeuclidiene

Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind[1]).

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse ver-

1) Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; in einem besonderen Aufsatze gedenke ich demnächst auf dieselben zurückzukommen.
Braunschweig, im Juli 1867. R. Dedekind.

Figura 45

și au învățat să privească lumea conform acestora. Perceperea euclidiană a spațiului s-a dovedit a fi, la urma urmelor, învățată, iar nu intuitivă. Toate aceste transformări spectaculoase l-au făcut pe marele matematician francez Henri Poincaré (1854–1912) să conchidă că axiomele geometriei „nu sunt nici intuiții a priori, nici fapte experimentale. Ele sunt *convenții* [s. m.]. Alegerea pe care o facem dintre toate convențiile posibile e călăuzită de faptele experimentale, dar rămâne liberă“. Cu alte cuvinte, Poincaré privea axiomele doar ca pe niște „definiții deghizate“.

Perspectiva lui Poincaré a fost influențată nu numai de geometriile neeuclidiene prezentate până acum, dar și de proliferarea altor noi geometrii care, spre sfârșitul secolului XIX, păreau aproape scăpate de sub control. În *geometria proiectivă* (în genul celei care se obține atunci când imaginea de pe un film de celuloid e proiectată pe un ecran), de pildă, putem efectiv schimba între ele rolul punctelor și cel al dreptelor, astfel încât teoremele despre puncte și linii (în această ordine) devin teoreme despre linii și puncte. În *geometria diferențială*, matematicienii folosesc calculul infinitezimal pentru a studia proprietățile geometrice globale ale diverselor spații matematice, de genul suprafeței unei sfere sau a unui tor. Aceste geometrii și altele păreau, cel puțin în primă instanță, invenții ingenioase ale unor minți pline de imaginație matematică, iar nu descrieri exacte ale spațiului fizic. Cum mai poate fi atunci apărată ideea de Dumnezeu-matematician? La urma urmelor, dacă „Dumnezeu face mereu geometrie“ (afirmație atribuită de Plutarh lui Platon), care dintre aceste numeroase geometrii e practicată de Cel de Sus?

Dezvăluirea profundelor neajunsuri ale geometriei euclidiene clasice i-a obligat pe matematicieni să-și pună serios problema bazelor matematicii în general, și în particular a relației dintre logică și matematică. Ne vom întoarce la acest important subiect în capitolul 7, dar deocamdată trebuie reținut un fapt: ideea că axiomele sunt evidente prin ele însele a primit o lovitură fatală. Prin urmare, deși secolul XIX a fost martorul unor progrese remarcabile în algebră și analiză, revoluția din geometrie a avut cel mai puternic impact asupra felului în care era privită natura matematicii.

Despre spațiu, numere și oameni

Înainte ca matematicienii să se ocupe de problema generală a bazelor matematicii, câteva probleme „mai mici“ se cereau urgent rezolvate. Mai întâi, faptul că geometriile neeuclidiene fuseseră formulate și apăruseră în publicații nu însemna că erau vlăstarele

legitime ale matematicii. Exista mereu teama de inconsistență – posibilitatea ca, împingând aceste geometrii până la ultimele lor consecințe logice, să apară contradicții nerezolvabile. În anii 1870, italianul Eugenio Beltrami (1835–1900) și germanul Felix Klein (1849–1925) demonstraseră că, dacă geometria euclidiană e lipsită de contradicții, la fel sunt și geometriile neeuclidiene. Rămânea totuși întrebarea mai generală – cât de solide sunt bazele geometriei euclidiene? Apoi, mai era problema relevanței. Cei mai mulți matematicieni priveau noile geometrii în cel mai bun caz ca pe niște bizarerii nostime. Dacă geometria euclidiană își întemeia forța istorică pe faptul că era considerată descrierea spațiului real, s-a crezut la început că geometriile neeuclidiene erau complet rupte de realitatea fizică. Prin urmare, mulți matematicieni tratau geometriile neeuclidiene ca pe rudele sărace ale geometriei euclidiene. Henri Poincaré era ceva mai înțelegător, dar și el spunea că, dacă oamenii ar fi transportați într-o lume cu o geometrie neeuclidiană, tot „n-am găsi că ar fi convenabil să trecem“ de la geometria euclidiană la cea neeuclidiană. Două întrebări stăruiau așadar: (1) Puteau geometria (în particular) și alte ramuri ale matematicii (în general) să fie așezate pe o bază logic-axiomatică solidă? și (2) Care era relația, dacă exista vreuna, între matematică și lumea fizică?

Unii matematicieni au adoptat o perspectivă pragmatică în chestiunea fundamentelor geometriei. Dezamăgiți că ceea ce consideraseră a fi adevăr absolut se întemeia de fapt pe experiență, s-au întors la aritmetică – matematica numerelor. Geometria analitică a lui Descartes, în care punctele din plan erau identificate cu perechi ordonate de numere, cercurile cu perechi satisfăcând o anumită ecuație (vezi capitolul 4) etc., oferea tocmai instrumentele necesare pentru reclădirea fundamentelor geometriei pe baza numerelor. Matematicianul german Jacob Jacobi (1804–1851) exprima pesemne această schimbare de opinie atunci când a înlocuit cuvintele lui Platon „Dumnezeu face mereu geometrie“ cu propriul său motto „Dumnezeu face mereu aritmetică“. Și totuși, într-un fel, nu era vorba decât de transferarea problemei dintr-o

ramură a matematicii într-alta. Deși marele matematician german David Hilbert (1862–1943) a reușit să demonstreze că geometria euclidiană e lipsită de contradicții atâta vreme cât aritmetica e lipsită de contradicții, caracterul necontradictoriu al acesteia din urmă era departe de a fi demonstrat.

O nouă idee plutea în aer în privința relației dintre matematică și lumea fizică. Timp de secole, rolul matematicii de a explica universul primise permanent confirmări. Matematizarea științelor înfăptuită de Galilei, Descartes, Newton, familia Bernoulli, Pascal, Lagrange, Quetelet și alții a fost luată drept dovadă puternică în sprijinul ideii că natura are la bază un „proiect" matematic. Evident, ne putem pune o întrebare simplă: Dacă matematica nu e limbajul cosmosului, cum de reușește să explice atât legile elementare ale naturii, cât și trăsături specific umane?

Matematicienii își dădeau seama, evident, că matematica opera doar cu forme platoniciene abstracte, dar acestea erau considerate idealizări rezonabile ale elementelor fizice reale. De fapt, ideea că marea carte a naturii e scrisă în limbajul matematicii era atât de adânc înrădăcinată, încât mulți matematicieni au refuzat categoric fie și să ia în considerare noțiuni și structuri matematice care nu erau direct legate de lumea fizică. Acesta era cazul, de pildă, al straniului personaj care a fost Gerolamo Cardano (1501–1576). Cardano era un matematician desăvârșit, un fizician de renume și un jucător împătimit. În 1545, publică una dintre cărțile de referință din istoria algebrei – *Ars magna* (*Marea artă*). În acest tratat cuprinzător, Cardano prezintă în detaliu rezolvarea ecuațiilor algebrice, de la ecuația simplă de gradul al doilea (în care necunoscuta apare la puterea a doua, x^2) la cele de gradul al treilea (x^3) și al patrulea (x^4). În matematica clasică însă, cantitățile erau adesea interpretate ca elemente geometrice. De pildă, valoarea necunoscutei x era identificată cu un segment de dreaptă de acea lungime, puterea a doua x^2 era o arie, iar puterea a treia x^3 era un corp de volum corespunzător. Prin urmare, în primul capitol din *Ars magna*, Cardano explică:

> Încheiem considerațiile noastre amănunțite cu cubul, iar pe celelalte le vom menționa în general, însă doar în trecere. Căci, dacă *positio* [prima putere] desemnează o dreaptă, *quadratum* [pătratul] o suprafață și *cubum* [cubul] un corp solid, ar fi absurd să mergem mai departe. Natura nu îngăduie acest lucru. Se va vedea deci că toate aceste probleme sunt complet demonstrate până la cub inclusiv, dar, pentru celelalte pe care le vom adăuga, fie de nevoie, fie din curiozitate, nu trecem dincolo de prezentare.

Cu alte cuvinte, Cardano susține că, din moment ce lumea fizică, așa cum e percepută de simțurile noastre, nu conține decât trei dimensiuni, ar fi stupid pentru matematicieni să se ocupe de un număr mai mare de dimensiuni sau de ecuații de grad mai înalt.

O opinie asemănătoare a fost exprimată de matematicianul englez John Wallis (1616–1703), în a cărui *Arithmetica infinitorum* Newton a găsit metode utile pentru analiză. În *Tratatul de algebră*, o altă lucrare importantă, Wallis este primul care spune că „natura nu admite mai mult de *trei* dimensiuni (locale)“. Apoi intră în detalii:

> O dreaptă care intersectează o altă dreaptă va genera un plan sau o suprafață; intersectarea lui cu o altă dreaptă va genera un solid. Dar, dacă solidul intersectează o dreaptă, ce se va genera? Un plano-plan? Acesta e un monstru al naturii, mai greu de închipuit decât o himeră [în mitologia greacă, un monstru tricefal care scotea flăcări, având un cap de șarpe, unul de leu și altul de capră] sau un centaur [în mitologia greacă, o ființă cu bust de om și trup și picioare de cal]. Pentru că lungimea, lățimea și grosimea ocupă tot spațiul. Nici nu ne putem imagina cum ar exista o a patra dimensiune locală dincolo de acestea trei.

Logica lui Wallis e din nou limpede: n-are rost nici măcar să ne închipuim o geometrie care nu descrie spațiul real.

Până la urmă, opiniile au început să se schimbe. Matematicienii din secolul XVIII au fost primii care au considerat timpul ca pe

o posibilă a patra dimensiune. Într-un articol intitulat „Dimensiune“ și publicat în 1754, fizicianul Jean d'Alembert (1717–1783) spune:

> Am afirmat mai sus că sunt imposibil de conceput mai mult de trei dimensiuni. O cunoștință de-a mea, un om remarcabil, susține că putem totuși privi durata ca pe o a patra dimensiune și că produsul dintre timp și volum este, într-un fel, un produs în patru dimensiuni. Această idee poate fi combătută, dar mi se pare că are un anumit merit, în afara noutății.

Marele matematician Joseph Lagrange a mers cu un pas mai departe, afirmând în 1797:

> Cum poziția unui punct în spațiu depinde de trei coordonate rectangulare, în problemele de mecanică aceste coordonate sunt concepute ca funcții de *t* [timp]. Prin urmare, mecanica poate fi privită ca o geometrie în patru dimensiuni, iar analiza mecanică poate fi privită ca o prelungire a analizei geometrice.

Aceste idei îndrăznețe au deschis calea unor extinderi ale matematicii de neconceput până atunci – geometrii într-un număr arbitrar de dimensiuni – care ignorau complet problema relației lor cu spațiul fizic.

Kant s-a înșelat poate crezând că simțurile care ne dau percepția spațială urmează exclusiv tiparele euclidiene, dar nu încape îndoială că percepția noastră operează cel mai firesc și mai intuitiv în maximum trei dimensiuni. Ne putem închipui destul de ușor cum ar arăta lumea noastră tridimensională în universul platonician bidimensional al umbrelor, dar a trece la un număr de dimensiuni mai mare de trei cere cu adevărat o imaginație de matematician.

Hermann Günther Grassmann (1809–1877) a fost unul dintre părinții *geometriei* n-*dimensionale* – geometria într-un număr arbitrar de dimensiuni. Provenind dintr-o familie cu doisprezece copii, el însuși tată a unsprezece copii, Grassmann a fost un profesor de școală care n-a studiat matematica la universitate. În timpul

vieții, a fost mai cunoscut pentru lucrările sale de lingvistică (studii de sanscrită și gotică) decât pentru cercetările sale în matematică. Unul dintre biografii săi observa: „S-ar părea că destinul lui Grassmann este de a fi redescoperit din când în când, de fiecare dată ca și cum ar fi fost complet uitat după moartea sa.“ Și totuși, lui i se datorează crearea unei științe abstracte a „spațiilor“, în care geometria obișnuită nu e decât un caz particular. Grassmann și-a publicat ideile inovatoare (întemeind o ramură a matematicii numită algebră liniară) în 1844, într-o carte cunoscută în mod curent sub titlul prescurtat *Ausdehnungslehre* (ceea ce înseamnă *Teoria extensiei*; titlul complet este: *Teoria extensiei liniare: O nouă ramură a matematicii*).

În prefața cărții, Grassmann scria: „Geometria nu poate fi privită […] ca o ramură a matematicii, dar ea se leagă de ceva deja existent în natură, anume spațiul. Am înțeles de asemenea că trebuie să existe o ramură a matematicii care să ofere pe o cale pur abstractă legi asemănătoare cu cele ale geometriei.“

Aceasta era o perspectivă radical nouă asupra naturii matematicii. Pentru Grassmann, geometria tradițională – moștenită de la grecii antici – se ocupa cu spațiul fizic și, prin urmare, nu putea fi considerată o veritabilă ramură a matematicii abstracte. Pentru el, matematica era mai curând o construcție abstractă a creierului uman, care nu se aplică neapărat lumii reale.

Este fascinant de urmărit aparent banalul șir de raționamente ale lui Grassmann care l-au condus la teoria algebrei geometrice. A început cu formula simplă $AB + BC = AC$, care apare în orice carte de geometrie în problema lungimii segmentelor de dreaptă (vezi figura 46a). Aici însă Grassmann a observat ceva interesant. El a descoperit că formula rămânea valabilă indiferent de ordinea punctelor A, B și C, atâta timp cât AB, BC etc. nu sunt interpretate ca simple lungimi, ci li se atribuie și o „direcție“, așa încât $BA = – AB$. De exemplu, dacă C se află între A și B (ca în figura 46b) , atunci $AB = AC + CB$, dar, cum $CB = – BC$, găsim că $AB = AC – BC$, iar formula inițială $AB + BC = AC$ se regăsește simplu adunând BC în ambii membri.

Figura 46

Lucrul era interesant în sine, dar în extensia lui Grassmann apăreau și alte surprize. Să observăm că, dacă am avea de-a face cu algebra în loc de geometrie, atunci o expresie ca *AB* ar desemna produsul $A \times B$. În acest caz, propunerea lui Grassmann $BA = -AB$ încalcă una dintre legile sacrosancte ale aritmeticii – aceea că produsul a două cantități nu depinde de ordinea în care efectuăm înmulțirea. Grassmann a luat în considerare această posibilitate tulburătoare și a inventat o nouă algebră coerentă (numită *algebră exterioară*) care era mai permisivă în privința înmulțirii și, în același timp, putea opera cu o geometrie într-un număr arbitrar de dimensiuni.

Pe la 1860, geometria *n*-dimensională se răspândea ca ciupercile după ploaie. Conferința lui Riemann făcuse din spațiile curbe cu un număr arbitrar de dimensiuni un domeniu fundamental de cercetare, iar alți matematicieni, precum Arthur Cayley și James Sylvester din Anglia sau Ludwig Schläfi din Elveția, veniseră cu propriile lor contribuții originale. Matematicienii începeau să se simtă eliberați de constrângerile care legaseră matematica, timp de secole, doar de noțiunile de spațiu și număr. Aceste constrângeri fuseseră atât de puternice de-a lungul istoriei încât, chiar și în secolul XVIII, prolificul matematician elvețian Leonard Euler (1707–1783) spusese că „matematica, în genere, e știința cantității sau știința care cercetează mijloacele de măsurare a cantității". Abia în secolul XIX a început să adie vântul schimbării.

În primul rând, apariția spațiilor geometrice abstracte și a noțiunii de infinit (atât în geometrie, cât și în teoria mulțimilor) a diluat sensul noțiunilor de „cantitate" și de „măsurare" până la dizolvare totală. În al doilea rând, studiile de matematică abstractă care se înmulțeau rapid au făcut ca matematica să se îndepărteze

și mai mult de realitatea fizică, insuflând viață și „existență“ abstracțiunilor.

Georg Cantor (1845–1918), creatorul *teoriei mulțimilor*, a exprimat spiritul libertății dobândite de matematică prin următoarea „declarație de independență“: „Matematica e absolut liberă în dezvoltarea ei, trebuind doar să opereze cu concepte necontradictorii care să se afle în relații precise, ordonate prin definiții, cu conceptele introduse anterior, care sunt deja folosite și consacrate.“ La care algebristul Richard Dedekind (1831–1916) a adăugat, șase ani mai târziu: „Conceptul de număr este complet independent de ideile sau intuițiile privind spațiul și timpul. […] Numerele sunt creații libere ale minții umane.“ Atât Cantor, cât și Dedekind considerau matematica o cercetare abstractă, conceptuală, constrânsă doar de cerința coerenței, fără nici un fel de obligații față de calcule sau limbajul realității fizice. După cum rezuma Cantor: „*Esența matematicii* constă în întregime în *libertatea* ei.“

Spre sfârșitul secolului XIX, majoritatea matematicienilor acceptaseră perspectiva lui Cantor și Dedekind asupra libertății matematicii. Obiectivul matematicii nu mai era căutarea adevărurilor despre natură, ci construirea unor structuri abstracte – sistemele de axiome – și urmărirea tuturor consecințelor logice ale acestor axiome.

Se putea crede că în felul acesta se punea capăt dezbaterilor în jurul întrebării dacă matematica e descoperită sau inventată. Dacă matematica nu-i decât un joc, chiar și unul complex, condus după reguli inventate arbitrar, atunci n-are nici un sens să crezi în realitatea conceptelor matematice, nu-i așa?

Surprinzător însă, ruptura de realitatea fizică i-a condus pe unii matematicieni la perspectiva contrară. În loc să tragă concluzia că matematica e o invenție umană, s-au întors la ideea platoniciană că matematica este o lume a adevărurilor independentă, având o existență la fel de reală ca aceea a universului fizic. Încercările de a lega matematica și fizica erau tratate de acești „neo-platonicieni“ ca un exercițiu amatoristic de matematică *aplicată*, spre

deosebire de matematica *pură*, care se presupunea a fi indiferentă față de tot ce ține de lumea fizică.

Iată ce spunea matematicianul francez Charles Hermite (1822–1901) într-o scrisoare către matematicianul danez Thomas Joannes Stieltjes (1856–1894) din 13 mai 1894: „Dragul meu prieten", scrie el,

> mă bucur să văd că ești tentat să te transformi într-un naturalist pentru a observa fenomenele lumii aritmetice. Împărtășim același crez; sunt convins că numerele și funcțiile din analiză nu sunt produse arbitrare ale minții noastre; cred că ele există în afara noastră, având aceleași caracteristici necesare ca și lucrurile din realitatea obiectivă, și că le întâlnim sau le descoperim, și le studiem, întocmai ca fizicienii, chimiștii sau zoologii.

Matematicianul englez G.H. Hardy, care a lucrat de altfel în domeniul matematicii pure, a fost unul dintre cei mai vehemenți platonicieni moderni. Într-un discurs ținut la Asociația Britanică pentru Progresul Științei, pe 7 septembrie 1922, spunea:

> Matematicienii au construit un număr foarte mare de sisteme de geometrie diferite. Euclidiene și neeuclidiene, având una, două, trei sau oricâte dimensiuni. Toate aceste sisteme sunt absolut și egal valabile. Ele încorporează rezultatele observațiilor matematicienilor asupra realității lor, una mult mai intensă și mai stabilă decât îndoielnica și fantomatica realitate a fizicii. […] Rolul unui matematician este deci pur și simplu de a observa faptele din propriul său sistem al realității, dificil și complicat, acel uimitor de frumos complex al relațiilor logice care constituie obiectul științei sale, ca un explorator ce privește un lanț de munți din depărtare, și de a consemna rezultatele observațiilor sale într-o serie de hărți, fiecare dintre ele fiind o ramură a matematicii pure.

Chiar dacă dovezile pledau în favoarea naturii arbitrare a matematicii, platonicienii încăpățânați nu erau dispuși să depună armele.

Dimpotrivă, ei găseau că a scotoci în ceea ce Hardy numea „realitatea lor“ era mult mai tentant decât să continue să cerceteze legăturile cu realitatea fizică. Dar, independent de ideile privind realitatea metafizică a matematicii, un lucru devenise limpede. Cu toată libertatea neîngrădită a matematicii, rămânea o constrângere neschimbată și de nezdruncinat – aceea a coerenței logice. Matematicienii și filozofii își dădeau seama că nu puteau tăia cordonul ombilical dintre matematică și logică. De aici a apărut o altă idee: se putea clădi întreaga matematică pe un fundament logic unic? Iar, dacă se putea, atunci care era secretul eficienței sale? Sau, invers, puteau fi folosite metodele matematice pentru a cerceta raționamentul în general? Dacă da, atunci matematica ar deveni nu numai limbajul naturii, ci și limbajul gândirii umane.

Capitolul 7

Logicienii: Reflecție asupra raționamentului

În anunțul din fața unei frizerii dintr-un sat scrie: „Îi bărbieresc pe toți bărbații din sat care nu se bărbieresc singuri.“ Sună perfect rezonabil, nu-i așa? Evident, bărbații care se bărbieresc nu au nevoie de serviciile unui frizer, și e normal ca frizerul să-i bărbierească pe toți ceilalți. Dar, gândiți-vă, cine îl bărbierește pe frizer? Dacă se bărbierește singur, atunci, potrivit anunțului, ar trebui să fie unul dintre cei care nu se bărbieresc. Pe de altă parte, dacă nu se bărbierește singur, atunci, iarăși potrivit anunțului, ar trebui să fie unul dintre cei pe care îi bărbierește! Deci, se bărbierește sau nu? Întrebări mult mai mărunte au condus, în istorie, la serioase certuri de familie. Acest paradox a fost propus de Bertrand Russell (1872–1970), unul dintre cei mai mari logicieni și filozofi ai secolului XX, pentru a demonstra că intuiția logicii umane e failibilă. Paradoxurile sau *antinomiile* reflectă situații în care premise aparent acceptabile conduc la concluzii inacceptabile. În exemplul de mai sus, frizerul satului se bărbierește și în același timp nu se bărbierește. Poate fi rezolvat acest paradox? O rezolvare, conformă cu enunțul de mai sus, e simplă: frizerul este femeie! Dar, dacă ni se spune că frizerul e bărbat, atunci concluzia absurdă e rezultatul acceptării de la bun început a premiselor. Cu alte cuvinte, un asemenea bărbier pur și simplu nu poate exista. Ce au însă toate astea de-a face cu matematica? Ei bine, se dovedește că matematica și logica sunt intim legate. Iată cum prezintă Russell această legătură:

> Matematica şi logica au fost, istoric vorbind, discipline complet distincte. Matematica era legată de ştiinţă, logica de greci. Ambele s-au dezvoltat însă în vremurile moderne: logica a devenit mai matematică, iar matematica a devenit mai logică. Consecinţa este că acum [în 1919] e absolut imposibil să tragi o linie de demarcaţie între cele două; de fapt, ele sunt unul şi acelaşi lucru. Ele se deosebesc aşa cum se deosebeşte băiatul de bărbat: logica e tinereţea matematicii, iar matematica e maturitatea logicii.

Russell susţine aici că *matematica poate fi redusă la logică*. Cu alte cuvinte, conceptele de bază ale matematicii, chiar şi obiecte ca numerele, pot fi definite în funcţie de legile fundamentale ale raţionamentului. Russell avea să susţină mai târziu chiar că aceste definiţii pot fi folosite împreună cu principiile logicii pentru a da naştere teoremelor din matematică.

Iniţial, această perspectivă asupra naturii matematicii (numită *logicism*) a primit atât binecuvântarea celor care considerau matematica doar o invenţie umană, un joc complicat (*formaliştii*), cât şi a platonicienilor. Primii au fost la început fericiţi să vadă un ansamblu de „jocuri“ aparent fără legătură unindu-se într-o „mamă a tuturor jocurilor“. Ceilalţi au văzut o rază de speranţă în ideea că întreaga matematică a crescut dintr-o singură sursă. În ochii platonicienilor, devenea astfel mai probabil să existe o unică origine metafizică. Evident, o rădăcină unică a matematicii putea ajuta, cel puţin în principiu, la găsirea originii forţelor sale.

Pentru a da o imagine completă, trebuie spus că a existat o şcoală de gândire – *intuiţionismul* – opusă atât logicismului, cât şi formalismului. Reprezentantul cel mai de seamă al acestei şcoli a fost excentricul matematician olandez Luitzen E.J. Brouwer (1881–1966). El credea că numerele naturale provin dintr-o intuiţie a timpului şi a momentelor individuale din experienţa noastră. Pentru el, nu încăpea îndoială că matematica e rezultatul gândirii umane, prin urmare nu vedea deloc nevoia unor legi logice universale de tipul celor la care se gândea Russell. Brouwer a mers mult mai departe, declarând că singurele entităţi matematice care au

sens sunt cele ce pot fi explicit construite pe baza numerelor naturale, folosind un număr finit de pași. Prin urmare, a respins mari domenii ale matematicii pentru care demonstrațiile constructive nu erau posibile. Alt concept logic negat de Brouwer era *principiul terțului exclus* – după care orice afirmație este fie adevărată, fie falsă. A permis în schimb afirmațiilor să lâncezească într-un purgatoriu, în care erau „nedecise". Acestea și alte câteva constrângeri intuiționiste au marginalizat această școală de gândire. Și totuși, ideile intuiționiste au anticipat unele dintre descoperirile din științele cognitive legate de întrebarea dacă oamenii dobândesc într-adevăr cunoașterea matematică (temă abordată în capitolul 9), și i-au stimulat pe unii filozofi moderni ai matematicii (cum ar fi Michael Dummet). Perspectiva lui Dummet este esențialmente lingvistică, afirmând că „sensul unei afirmații matematice determină și este complet determinată de *folosirea* ei".

Dar cum a apărut o asemenea colaborare strânsă între matematică și logică? Era viabil programul logicist? Vom trece pe scurt în revistă câteva momente-cheie din ultimele patru secole.

Logica și matematica

În mod tradițional, logica se ocupa cu relațiile dintre concepte și propoziții, și cu procesele prin care se puteau obține deducții corecte din aceste relații. De exemplu, deducții de genul „fiecare *X* este un *Y*; unii *Z* sunt *X*; atunci unii *Z* sunt *Y*" sunt construite astfel încât să asigure automat adevărul concluziei, atâta timp cât premisele sunt adevărate. De pildă, „fiecare biograf este un autor; unii politicieni sunt biografi; atunci unii politicieni sunt autori" produce o concluzie adevărată. Pe de altă parte, deducții de forma generală „fiecare *X* este un *Y*; unii *Z* sunt *Y*; atunci unii *Z* sunt *X*" nu sunt corecte, deoarece se pot găsi exemple pentru care, în ciuda premiselor adevărate, concluzia e falsă. De pildă: „fiecare om este un mamifer; unele animale cu coarne sunt mamifere; atunci unele animale cu coarne sunt oameni".

Atâta timp cât sunt respectate anumite reguli, corectitudinea unei demonstrații nu depinde de subiectele propozițiilor. De pildă:

Fie valetul l-a asasinat pe milionar, fie fata lui l-a ucis;
Fiica sa nu l-a ucis;
Atunci valetul l-a asasinat.

produce o deducție corectă. Soliditatea acestei demonstrații nu se sprijină pe părerea noastră despre relația dintre milionar și fiica lui. Corectitudinea este aici asigurată de faptul că propoziții de forma generală „dacă *p* sau *q*, și nu *q*, atunci *p*“ produc adevăr logic.

Ați observat poate că în cele două exemple *X*, *Y* și *Z* joacă roluri foarte asemănătoare celor ale variabilelor din ecuațiile matematice – marchează locul în care sunt introduse expresiile, la fel cum valorile numerice sunt introduse pentru variabile în algebră. În mod asemănător, adevărul din deducția „dacă *p* sau *q*, și nu *q*, atunci *p*“ ne amintește de axiomele geometriei lui Euclid. Cu toate acestea, a trebuit să treacă aproape două milenii de meditații asupra logicii pentru ca matematicienii să reacționeze la această analogie.

Primul care a încercat să combine cele două discipline, logica și matematica, într-o singură „matematică universală“ a fost matematicianul și filozoful raționalist german Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Leibniz, care studiase dreptul, și-a efectuat cea mai mare parte a studiilor de matematică, fizică și filozofie în timpul liber. Pe durata vieții, a fost cunoscut mai cu seamă pentru că formulase independent de (și aproape simultan cu) Newton bazele calculului infinitezimal (și pentru disputa aprigă ce a urmat între ei asupra priorității). Într-o lucrare concepută aproape în întregime la vârsta de șaisprezece ani, Leibniz preconiza un limbaj universal al raționamentului, sau *characteristica universalis*, pe care îl considera instrumentul absolut al gândirii. Planul său era să reprezinte noțiunile și ideile simple prin simboluri, iar pe cele mai complexe prin combinații ale acestor semne elementare. Leibniz spera să poată calcula efectiv adevărul oricărei afirmații, din orice disciplină

științifică, doar prin operații algebrice. El a prezis că, folosind corect calculul logic, dezbaterile filozofice puteau fi tranșate. Din păcate, Leibniz n-a ajuns prea departe în elaborarea algebrei logicii. În plus față de principiul general al unui „alfabet al gândirii", cele două contribuții ale sale au fost stabilirea condițiilor în care două lucruri sunt egale și concluzia oarecum evidentă că nici o afirmație nu poate fi simultan adevărată și falsă. Prin urmare, deși strălucite, ideile lui Leibniz au trecut aproape cu totul neobservate.

Logica a ajuns din nou la modă pe la jumătatea secolului XIX, iar redeșteptarea interesului pentru ea a adus cu sine cercetări importante: mai întâi prin Augustus De Morgan (1806–1871), apoi prin George Boole (1815–1864), Gottlob Frege (1848–1925) și Giuseppe Peano (1858–1932).

De Morgan a fost extrem de prolific – a publicat mii de articole și cărți în diverse domenii: matematică, istoria matematicii, filozofie. Între lucrările sale mai puțin obișnuite se numără un almanah al lunilor pline (acoperind mii de ani) și o culegere de curiozități matematice. Întrebat odată despre vârsta sa, el a răspuns: „Am avut x ani în anul x^2". Puteți verifica că 43 e singurul număr al cărui pătrat este cuprins între 1806 și 1871 (anul nașterii și, respectiv, al morții lui De Morgan). Cele mai originale contribuții ale lui De Morgan au fost pesemne în logică, unde a extins mult domeniul silogismelor lui Aristotel și a reluat abordarea algebrică a raționamentului. De Morgan privea logica cu ochi de algebrist, iar algebra cu ochi de logician. Într-unul dintre articolele sale, a prezentat această perspectivă vizionară: „În algebră întâlnim cea mai curentă întrebuințare a formelor logice […] algebristul trăia deja în atmosfera rarefiată a silogismului, în permanenta compunere a relațiilor, înainte ca existența acestei atmosfere să fie recunoscută."

Una dintre cele mai importante contribuții ale lui De Morgan în logică este *cuantificarea predicatului*. Aceasta e o denumire ușor pretențioasă pentru ceea ce poate fi considerat drept o surprinzătoare omisiune din partea logicienilor perioadei clasice. Aristotelicienii au înțeles, în mod corect, că din premise de tipul

„unii *Z* sunt *X*“ și „unii *Z* sunt *Y*“, nu se poate stabili cu necesitate o relație între *X* și *Y*. De pildă, propozițiile „unii oameni mănâncă pâine“ și „unii oameni mănâncă mere“ nu permit să se tragă vreo concluzie fermă privind relația dintre mâncătorii de mere și mâncătorii de pâine. Până în secolul XIX, logicienii au presupus și că, pentru ca o relație între *Z* și *Y* să decurgă în chip necesar, termenul mediu („*Z*“ de mai sus) trebuie să fie „universal“ într-una dintre premise. Altfel spus, propoziția trebuie să conțină „toți *Z*“. De Morgan a arătat că presupunerea era falsă. În cartea sa *Logica formală* (publicată în 1847), el arată că din premise de tipul „majoritatea *Z* sunt *X*“ și „majoritatea *Z* sunt *Y*“, decurge în mod necesar că „unii *X* sunt *Y*“. De pildă, propoziția „majoritatea oamenilor mănâncă pâine“ și „majoritatea oamenilor mănâncă mere“ implică inevitabil că „unii oameni mănâncă atât pâine, cât și mere“. De Morgan merge mai departe, exprimând noul silogism într-o formă cantitativă precisă. Să ne închipuim că numărul total de *Z* este *z*, numărul acelor *Z* care sunt în același timp *X* este *x*, iar numărul acelor *Z* care sunt în același timp *Y* este *y*. În exemplul de mai sus, pot fi 100 de oameni în total ($z = 100$), dintre care 57 mănâncă pâine ($x = 57$), iar 69 mănâncă mere ($y = 69$). Atunci, observă De Morgan, trebuie ca cel puțin ($x + y - z$) de *X* să fie în același timp *Y*. Cel puțin 26 de oameni (pentru că $57 + 69 - 100 = 26$) trebuie să mănânce atât pâine, cât și mere.

Din nefericire, această ingenioasă metodă de cuantificare a predicatului l-a antrenat pe De Morgan într-o dispută publică neplăcută. Filozoful scoțian William Hamilton (1788–1856) – a nu se confunda cu matematicianul irlandez William Rowan Hamilton – l-a acuzat pe De Morgan de plagiat, deoarece Hamilton publicase idei oarecum înrudite (dar mult mai puțin precise) cu câțiva ani înaintea lui De Morgan. Atacul lui Hamilton nu era deloc surprinzător, dată fiind atitudinea sa generală față de matematică și matematicieni. A spus odată: „Un studiu excesiv al matematicii face mintea absolut incapabilă de acele energii pe care le cer filozofia și viața.“ Valul de scrisori înveninate care a urmat acuzației lui Hamilton a produs involuntar un rezultat pozitiv: algebristul

George Boole s-a îndreptat spre logică. Boole povestea mai târziu în *Analiza matematică a logicii*:

> În primăvara acelui an, atenția mi-a fost atrasă de disputa dintre Sir W. Hamilton și profesorul De Morgan; interesul stârnit de aceasta m-a îndemnat să reiau șirul aproape complet uitat al cercetărilor mai vechi. Deși logica putea fi privită în raport cu noțiunea de cantitate, mi-am dat seama că în ea exista și un sistem mai profund de relații. Dacă erai îndreptățit s-o privești *din afară*, căci e legată prin intermediul Numărului de intuițiile asupra Spațiului și Timpului, erai de asemenea îndreptățit s-o privești *dinăuntru*, căci se întemeiază pe fapte de alt ordin, care sălășluiesc în alcătuirea Minții.

Aceste cuvinte modeste prezintă începutul a ceea ce avea să devină un rezultat remarcabil în logica simbolică.

Legile gândirii

George Boole (figura 47) s-a născut pe 2 noiembrie 1815 în orașul industrial Lincoln din Anglia. Tatăl său, John Boole, cizmar de meserie, arătase un mare interes pentru matematică și construise cu îndemânare diverse instrumente optice, iar mama lui Boole, Mary Ann Joyce, era cameristă. Cu un tată căruia nu-i stătea gândul la meseria lui, familia n-o ducea strălucit din punct de vedere material. George urmează de la șapte ani o școală unde îl are ca învățător pe un anume John Walter Reeves. În copilărie, Boole e atras mai ales de latină, pe care o învață de la un librar, și de greacă, pe care o învață singur. La paisprezece ani, reușește să traducă un poem al poetului grec Meleagros, din secolul I î. Cr. Mândru de George, tatăl îi publică traducerea în ziarul *Lincoln Herald* – ceea ce provoacă riposta unui profesor din oraș, care își exprimă într-un articol neîncrederea. Sărăcia de acasă îl silește pe George Boole să lucreze ca ajutor de învățător de la vârsta de șaisprezece

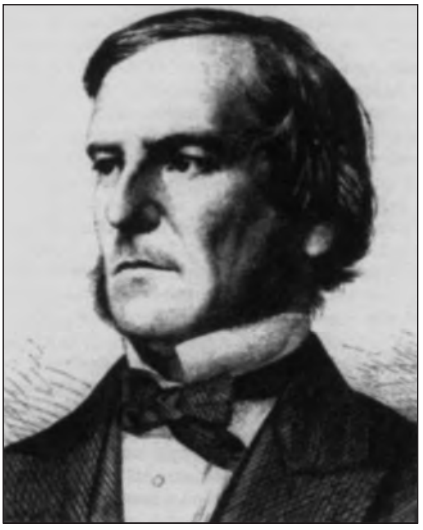


Figura 47

ani. În următorii ani își dedică timpul liber studiului francezei, italianei și germanei. Cunoașterea limbilor moderne s-a dovedit utilă, permițându-i să-și îndrepte atenția către lucrările importante ale unor matematicieni precum Sylvestre Lacroix, Laplace, Lagrange sau Jacobi. Dar nici așa n-a putut urma cursuri regulate de matematică, și a continuat să studieze pe cont propriu, contribuind în același timp din salariul său la întreținerea familiei. Talentele matematice ale acestui autodidact ies totuși la iveală, Boole publicând articole în *Cambridge Mathematical Journal*.

În 1842 Boole începe să corespondeze regulat cu De Morgan, căruia îi supune atenției lucrările sale de matematică. Grație faimei lui de matematician original și recomandărilor călduroase din partea lui De Morgan, Boole primește în 1849 un post de profesor de matematică la Queen's College, în orașul Cork din Irlanda, unde va continua să predea până la sfârșitul vieții. În 1855 se căsătorește cu Mary Everest (după al cărei unchi, topograful George

Everest, a fost numit muntele), cu șaptesprezece ani mai tânără, iar cuplul va avea cinci fiice. Într-o zi friguroasă din iarna lui 1864 Boole se udă până la piele în drum spre școală, dar insistă să-și țină lecțiile, chiar dacă hainele îi erau leoarcă. Acasă, soția îi agravează pesemne starea, turnând găleți de apă în pat, pentru a se conforma superstiției care spunea că leacul trebuia să repete cumva cauza bolii. Boole face pneumonie și moare pe 8 decembrie 1864. Bertrand Russell nu și-a ascuns admirația față de acest autodidact: „Matematica pură a fost descoperită de Boole, într-o lucrare pe care a intitulat-o *Legile gândiri* (1854). […] Cartea sa se ocupa de fapt de logica formală, care e același lucru cu matematica." Surprinzător pentru acea vreme, atât Mary Boole (1832–1916) cât și toate cele cinci fiice Boole și-au dobândit celebritatea în domenii mergând de la educație până la chimie.

Boole a publicat *Analiza matematică a logicii* în 1847 și *Legile gândirii* în 1854 (titlul ei complet este: *O cercetare a legilor gândirii, pe care se întemeiază teoriile matematice ale logicii și probabilităților*). Acestea au fost veritabile capodopere – primele lucrări care au dus cu un uriaș pas mai departe paralelismul dintre operațiile logice și cele aritmetice. Boole a transformat practic logica într-un tip de algebră (care avea să se numească *algebră booleană*) și a extins analiza logicii chiar și la raționamentul probabilistic. Iată ce spunea Boole:

> Scopul tratatului [*Legile gândirii*] este de a cerceta legile fundamentale ale acelor operații ale minții prin care e efectuat raționamentul; de a le exprima în limbajul simbolic al calculului [algebra logicii sau algebra booleană], iar, pornind de aici, de a întemeia știința logicii și a-i elabora metoda; de a face din această metodă baza unei metode generale de aplicare a teoriei matematice a probabilităților; și, în cele din urmă, de a aduna, din diferitele fragmente de adevăr aduse la lumină în cursul acestor cercetări, unele indicii privind natura și alcătuirea minții omenești.

Calculul lui Boole [algebra booleană] poate fi aplicat la relațiile dintre *mulțimi** (ansambluri de obiecte sau de elemente) sau în cadrul logicii *propozițiilor*. De pildă, dacă x și y sunt mulțimi, atunci o relație de tipul $x = y$ înseamnă că cele două mulțimi au exact aceleași elemente, chiar dacă sunt definite diferit. De pildă, dacă toți copiii dintr-o școală au mai puțin de doi metri, atunci două mulțimi definite prin x = „toți copiii din școală“ și y = „toți copiii din școală care au mai puțin de doi metri“ sunt egale. Dacă x și y reprezintă propoziții, atunci $x = y$ înseamnă că cele două propoziții sunt echivalente (una e adevărată dacă și numai dacă și cealaltă e adevărată). De pildă, propozițiile x = „John Barrymore e fratele lui Ethel Barrymore“ și y = „Ethel Barrymore e sora lui John Barrymore“ sunt egale. Expresia „$x \cdot y$“ reprezintă partea comună a celor două mulțimi x și y (acei membri care aparțin atât lui x, cât și lui y) sau *conjuncția*** propozițiilor x și y (adică „*x și y*“). De pildă, dacă x e mulțimea proștilor satului, iar y mulțimea tuturor lucrurilor cu păr negru, atunci $x \cdot y$ ar fi mulțimea proștilor cu păr negru din acel sat. Pentru propozițiile x și y, conjuncția $x \cdot y$ (sau cuvântul „și“) înseamnă că ambele propoziții trebuie să fie adevărate. De exemplu, atunci când Administrația Automobilelor spune că „trebuie să treceți un test de vedere periferică și un test de conducere“, înseamnă că ambele condiții trebuie îndeplinite. La Boole, pentru două mulțimi fără nici un element comun, expresia „$x + y$“ reprezenta mulțimea constând atât din elementele lui x, cât și din cele ale lui y. În cazul propozițiilor, „$x + y$“ corespunde lui „fie x, fie y, dar nu ambele“. De pildă, dacă x este propoziția „cepurile sunt pătrate“, iar y este propoziția „cepurile sunt rotunde“***, atunci $x + y$ este propoziția „cepurile sunt fie

---

* În original se folosește termenul „clasă“ (*class*), perfect echivalent aici cu cel de „mulțime“. L-am ales pe al doilea pentru firescul exprimării în română. (*N. t.*)

** *Conjunction* înseamnă în engleză și „conjuncție“, și „intersecție“ – primul termen aplicându-se logicii propozițiilor, iar al doilea teoriei mulțimilor. Folosirea unui singur termen subliniază legătura între cele două domenii. (*N. t.*)

*** Joc de cuvinte pornind de la expresia *to be a square peg in a round hole* (a fi un cep pătrat într-o gaură rotundă) = a nu fi în largul tău. (*N. t.*)

pătrate, fie rotunde“. În mod asemănător, „$x – y$“ reprezintă mulțimea acelor elemente ale lui x care nu sunt elemente ale lui y, sau propoziția „x, dar nu y“. Boole a notat mulțimea universală (conținând toate elementele ce pot fi aduse în discuție) prin 1, iar mulțimea vidă sau nulă (care nu are nici un element) prin 0. Observați că mulțimea vidă nu este același lucru cu numărul 0 – acesta din urmă e doar numărul de elemente ale mulțimii vide. Observați de asemenea că mulțimea vidă nu e același lucru cu nimic, pentru că o mulțime care nu conține nimic este totuși o mulțime. De pildă, dacă toate ziarele din Albania sunt scrise în albaneză, atunci mulțimea tuturor ziarelor în albaneză din Albania ar fi desemnată prin 1 în notația lui Boole, iar mulțimea tuturor ziarelor în spaniolă din Albania ar fi desemnată prin 0. Pentru propoziții, 1 reprezintă propoziția *adevărată* standard (de pildă, oamenii sunt muritori), iar 0 propoziția *falsă* standard (de pildă, oamenii sunt nemuritori).

Cu aceste convenții, Boole a putut formula un set de axiome definind o algebră a logicii. De pildă, putem să verificăm că, prin folosirea definițiilor de mai sus, propoziția evident adevărată „totul este fie x, fie non x“ poate fi scrisă în algebra booleană ca $x + (1 – x) = 1$, ceea ce este de asemenea adevărat în algebra obișnuită. În mod asemănător, afirmația că $0 \cdot x = 0$ reprezintă partea comună între o mulțime oarecare și mulțimea vidă, ceea ce înseamnă că e falsă conjuncția dintre orice propoziție și o propoziție falsă. De pildă, conjuncția „zahărul este dulce și oamenii sunt nemuritori“ este o propoziție falsă, în ciuda faptului că prima parte e adevărată. Observați din nou că această „egalitate“ din algebra booleană rămâne adevărată și pentru numerele algebrice obișnuite.

Pentru a demonstra forța metodelor sale, Boole a încercat să folosească simbolurile logice la tot ce a considerat important. De pildă, a analizat chiar și argumentele filozofilor Samuel Clarke și Baruch Spinoza privind existența și atributele lui Dumnezeu. Concluzia sa a fost, totuși, mai curând pesimistă: „Cred că e imposibil să încheiem lectura atentă a argumentelor lui Clarke și Spinoza fără să fim profund convinși de futilitatea tuturor încercărilor de a demonstra, complet a priori, existența unei Ființe Infinite,

a atributelor Sale și a relației Sale cu universul.“ În ciuda soliditătii concluziei lui Boole, se pare că nu toată lumea a fost convinsă de futilitatea unor asemenea încercări, căci versiuni revizuite ale argumentelor ontologice privind existența lui Dumnezeu continuă să apară chiar și azi.

În general, Boole a reușit să manipuleze conectorii logici *și*, *sau*, *dacă… atunci*, *și nu*, care se află acum în centrul operațiilor efectuate de calculatoare și diverse circuite de comutare, așa încât mulți îl consideră drept unul dintre „profeții“ care au deschis calea spre epoca digitală. Totuși, aflându-se încă la începuturi, algebra lui Boole nu era perfectă. Mai întâi, textele lui Boole sunt oarecum ambigue și greu de înțeles din pricina unor notații prea apropiate de cele din algebra obișnuită. În al doilea rând, Boole a complicat distincția dintre propoziții (de pildă, „Aristotel e muritor“), funcții propoziționale sau predicate (de pildă, „*x* este muritor“) și afirmații cuantificate (de pildă, „pentru orice *x*, *x* este muritor“). În cele din urmă, Frege și Russell aveau să spună că algebra provine din logică, iar atunci era mai firesc să se construiască algebra pe baza logicii decât invers.

Mai exista însă un aspect al cercetărilor lui Boole care avea să se dovedească foarte rodnic. Acesta a fost înțelegerea legăturii strânse dintre logică și noțiunea de *clasă* sau *mulțime*. Să ne amintim că algebra booleană se aplică la fel de bine mulțimilor și propozițiilor logice. Într-adevăr, atunci când toate elementele unei mulțimi *X* sunt și elemente ale mulțimii *Y* (*X* este o *submulțime* a lui *Y*), acest fapt poate fi exprimat ca o *implicație logică* de forma „dacă *X*, atunci *Y*“. De pildă, faptul că mulțimea tuturor cailor e o submulțime a tuturor animalelor patrupede poate fi rescris sub forma afirmației logice „Dacă *X* este un cal, atunci este un animal patruped“.

Algebra booleană a logicii a fost ulterior extinsă și perfecționată de mai mulți cercetători, dar cel care a exploatat complet paralelismul dintre mulțimi și logică, și care a ridicat totul la un nou nivel conceptual a fost Gottlob Frege (figura 48).

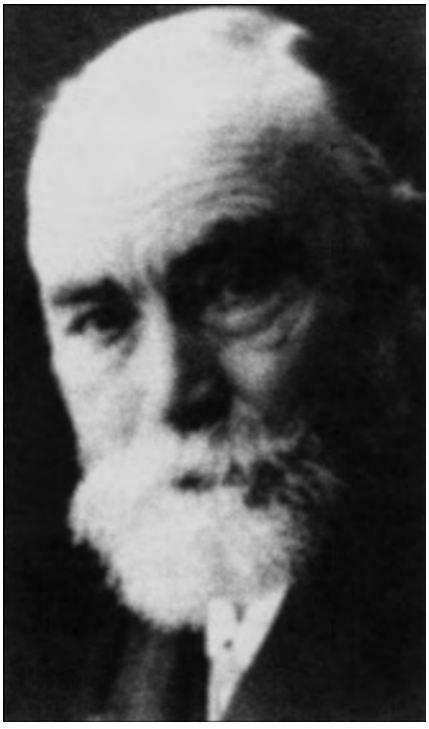


Figura 48

Friederich Ludwig Gottlob Frege s-a născut la Wismar, în Germania, unde atât tatăl, cât și mama sa aveau să fie, la momente diferite, directori ai liceului de fete. Studiază matematica, fizica, chimia și filozofia, întâi la Universitatea din Jena, apoi, încă doi ani, la Universitatea din Göttingen. După terminarea studiilor, începe să predea la Jena în 1874, unde va rămâne de-a lungul întregii sale cariere. În pofida unui program didactic încărcat, Frege reușește să publice în 1879 o primă lucrare revoluționară în logică: *Scriere conceptuală, un limbaj formal pentru gândirea pură, după model aritmetic* (cunoscută îndeobște ca *Begriffsschrift – Scriere conceptuală*). Frege elaborează aici un limbaj logic original, pe care avea să-l îmbogățească mai târziu în cele două volume din

Legile fundamentale ale aritmeticii (*Grundgesetze der Arithmetic*). Planul lui Frege în logică era precis și în același timp extrem de ambițios. Concentrându-se la început asupra aritmeticii, el a vrut să arate că până și concepte familiare precum numerele naturale 1, 2, 3… puteau fi reduse la construcții logice. Prin urmare, Frege credea că toate adevărurile aritmeticii puteau fi demonstrate pornind de la câteva axiome din logică. Cu alte cuvinte, nici măcar o afirmație de tipul 1 + 1 = 2 nu era un adevăr *empiric*, bazat pe observație, ci unul care putea fi dedus dintr-un set de axiome logice. *Begriffsschrift* a avut o asemenea influență, încât logicianul contemporan Willard Van Orman Quine (1908–2000) spunea odată: „Logica este un domeniu vechi, iar din 1879 a devenit unul important."

În centrul filozofiei lui Frege se află afirmația că adevărul e independent de judecata umană. În *Legile fundamentale ale aritmeticii*, el scrie: „A fi adevărat nu este același lucru cu a trece drept adevărat, în ochii unui singur om sau în ochii întregii lumi, și nu se poate reduce la aceasta. Nu există nici o contradicție în faptul că un lucru pe care toți îl consideră fals este adevărat. Prin «legile logicii» înțeleg legile adevărului, nu legile psihologice care iau lucrurile drept adevărate […] ele [legile adevărului] sunt pietre de hotar așezate pe temelii eterne, pe care gândirea noastră le poate acoperi, dar niciodată clinti."

Axiomele logice ale lui Frege iau în general forma „pentru orice… dacă… atunci". De pildă, una dintre axiome sună așa: „pentru orice *p*, dacă non-(non-*p*), atunci *p*". Această axiomă afirmă că, dacă o propoziție care contrazice propoziția în cauză e falsă, atunci propoziția e adevărată. De pildă, dacă nu e adevărat că nu trebuie să oprești mașina la stop, atunci e sigur că trebuie să oprești la stop. Pentru a elabora cu adevărat un „limbaj logic", Frege a adăugat o nouă trăsătură importantă setului de axiome. A înlocuit stilul tradițional subiect/predicat al logicii clasice prin concepte împrumutate din teoria matematică a funcțiilor. Voi explica pe scurt. Când scriem, în matematică, expresii de tipul $f(x) = 3x + 1$, aceasta înseamnă că *f* este o funcție de variabilă *x*

și că valoarea funcției se obține înmulțind valoarea variabilei cu trei și adăugând unu. Frege a definit ca funcții ceea ce el numea *concepte*. Să presupunem, de exemplu, că vrem să luăm în discuție conceptul „este carnivor“. Acest concept e notat simbolic printr-o funcție „$F(x)$“, iar valoarea acestei funcții este „adevărată“ dacă x = leu, și „falsă“ dacă x = căprioară. În mod asemănător, în privința numerelor, conceptul (funcția) „a fi mai mic decât 7“ face să corespundă valorii „fals“ toate numerele mai mari sau egale cu 7, și valorii „adevărat“ toate numerele mai mici decât 7. La Frege, obiectele pentru care un concept ia valoarea „adevărat“ sunt cele care „sunt conținute“ în acel concept.

După cum am văzut, Frege credea cu tărie că fiecare propoziție despre numerele naturale poate fi cunoscută și dedusă numai prin definiții și legi logice. Prin urmare, și-a început expunerea pe tema numerelor naturale fără a cere o înțelegere prealabilă a noțiunii de „număr“. De pildă, folosind limbajul logic al lui Frege, două concepte sunt *echinumerice* (adică le este asociat același număr) dacă există o corespondență biunivocă între obiectele care „sunt conținute“ într-un concept și cele care „sunt conținute“ în celălalt concept. De pildă, capacele lăzilor de gunoi sunt echinumerice cu lăzile însele (dacă toate au capac), iar definiția nu are nevoie să facă apel la numere. Frege a introdus apoi o definiție logică ingenioasă a numărului 0. Fie un concept F definit prin „nu identic cu sine“. Cum fiecare obiect trebuie să fie identic cu sine, nici un obiect nu intră în categoria lui F. Cu alte cuvinte, pentru orice obiect x, $F(x)$ = fals. Frege a definit numărul obișnuit zero drept „numărul conceptului F“. A continuat apoi definind toate numerele naturale în raport cu niște entități pe care le-a numit *extensiuni*.* Extensiunea unui concept este mulțimea tuturor obiectelor conținute în acel concept. Deși această definiție nu e cea mai ușor de digerat pentru un nelogician, în realitate e foarte simplă. Extensiunea conceptului de „femeie“, de pildă, e mulțimea tuturor

* Am folost terminologia care apare în traducerea lui Sorin Vieru din Gottlob Frege, *Fundamentele aritmeticii* (Editura Humanitas, București, 2000). (*N. t.*)

femeilor. Să observăm că extensiunea „femeii“ nu e ea însăşi o femeie.

Vă veţi întreba cum ajută această definiţie logică abstractă la definirea numărului 4, de pildă. Potrivit lui Frege, numărul 4 e extensiunea (sau clasa) tuturor conceptelor care au patru obiecte conţinute în ele. Astfel, conceptul de „a fi un picior al unui câine pe nume Snoopy“ aparţine acestei clase (şi deci numărului 4), la fel precum conceptul de „a fi bunic/bunică al/a lui Gottlob Frege“.

Programul lui Frege era impresionant, dar avea şi unele neajunsuri. Pe de o parte, ideea de a folosi concepte – pâinea de toate zilele a gândirii – pentru a construi aritmetica era de-a dreptul genială. Pe de altă parte, Frege nu a observat anumite inconsecvenţe esenţiale în formalismul său. În particular, s-a dovedit că una dintre axiome – cunoscută drept *Legea fundamentală V* – conduce la o contradicţie, fiind prin urmare vulnerabilă.

Legea spune, într-un mod aparent inocent, că extensiunea conceptului *F* este identică cu extensiunea conceptului *G* dacă şi

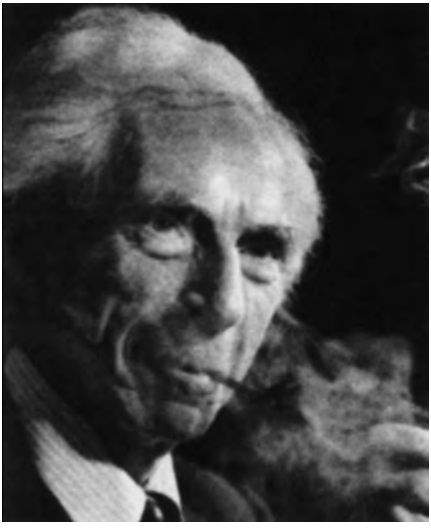


Figura 49

numai dacă *F* și *G* conțin aceleași obiecte. Dar bomba a explodat pe 16 iunie 1902, când, într-o scrisoare către Frege, Bertrand Russell (figura 49) a scos în evidență un paradox care arăta că *Legea fundamentală V* ducea la contradicții. Destinul a vrut ca scrisoarea lui Russell să ajungă chiar în momentul când al doilea volum al *Legilor fundamentale ale aritmeticii* pleca la tipar. Șocat, Frege se grăbește să adauge în manuscris o mărturisire sinceră: „Nu se poate închipui ceva mai neplăcut pentru un om de știință decât să vadă cum se surpă temelia operei sale tocmai atunci când a încheiat-o. Am fost pus în această situație de o scrisoare primită de la domnul Bertrand Russell în momentul în care lucrarea era aproape tipărită.“ Lui Russell, Frege îi răspunde cu multă eleganță: „Contradicția pe care ați descoperit-o mi-a provocat o mare surpriză și aproape consternare, aș spune, căci a zguduit fundația pe care voiam să clădesc aritmetica.“

Faptul că un singur paradox a avut asemenea efect devastator asupra unui întreg program ce urmărea să pună bazele matematicii poate părea surprinzător, dar, după cum spunea logicianul W.V.O. Quine de la Universitatea Harvard: „S-a întâmplat de mai multe ori în istorie ca descoperirea unui paradox să fie prilej pentru reconstrucția radicală a fundamentelor gândirii.“ Paradoxul lui Russell oferea tocmai un asemenea prilej.

Paradoxul lui Russell

Omul care a creat aproape de unul singur teoria mulțimilor a fost matematicianul german Georg Cantor. Mulțimile, sau clasele, s-au dovedit imediat esențiale și strâns legate de logică, încât orice încercare de a construi matematica pe baza logicii presupunea folosirea fundamentului axiomatic al teoriei mulțimilor.

O mulțime sau o clasă este pur și simplu un ansamblu de obiecte. Între obiecte nu e nevoie să existe vreo relație. Putem avea o mulțime conținând următoarele elemente: telenovelele difuzate în 2003, calul alb al lui Napoleon și noțiunea de iubire sinceră.

Elementele care aparțin unei anumite mulțimi se numesc *membrii* acelei mulțimi.

Majoritatea mulțimilor de obiecte pe care e probabil să le întâlnim nu sunt membre ale lor însele. De pildă, mulțimea tuturor fulgilor de zăpadă nu este în sine un fulg de zăpadă, mulțimea tuturor ceasurilor vechi nu este un ceas vechi etc. Dar unele mulțimi sunt de fapt membre ale lor însele. De exemplu, mulțimea a „tot ce nu este ceas de colecție“ este o membră a ei înseși, deoarece această mulțime cu certitudine nu este un ceas de colecție. În mod asemănător, mulțimea tuturor mulțimilor este membră a ei înseși, deoarece, evident, este o mulțime. Ce putem spune însă despre mulțimea „tuturor mulțimilor care nu sunt membre ale lor însele“? Să notăm această mulțime cu *R*. Este *R* membră a ei înseși (a lui *R*) sau nu? Cu siguranță *R* nu poate aparține lui *R*, fiindcă, dacă ar aparține, ar încălca definiția apartenenței la *R*. Dar, dacă *R* nu aparține ei înseși, atunci, potrivit definiției, trebuie să fie membră a lui *R*. Asemănător situației frizerului din sat, găsim că *R* aparține și, în același timp, nu aparține lui *R*, ceea ce e o contradicție logică. Acesta era paradoxul pe care Russell i-l trimisese lui Frege. Deoarece această antinomie subminase întregul proces prin care puteau fi determinate clasele sau mulțimile, lovitura dată programului lui Frege era fatală. Frege a făcut câteva încercări disperate de a-și salva sistemul de axiome, dar a eșuat. Concluzia părea dezastruoasă – logica formală era mai vulnerabilă la contradicțiile paralizante, în loc să fie mai solidă decât matematica.

Pe când Frege își elabora programul logicist, matematicianul și logicianul italian Giuseppe Peano urma o cale oarecum diferită. Peano voia să așeze aritmetica pe o bază axiomatică. A pornit deci de la formularea unui set simplu și concis de axiome. De pildă, primele trei axiome sunau astfel:

1. Zero este un număr.
2. Succesorul oricărui număr este de asemenea un număr.
3. Nu există două numere cu același succesor.

Figura 50

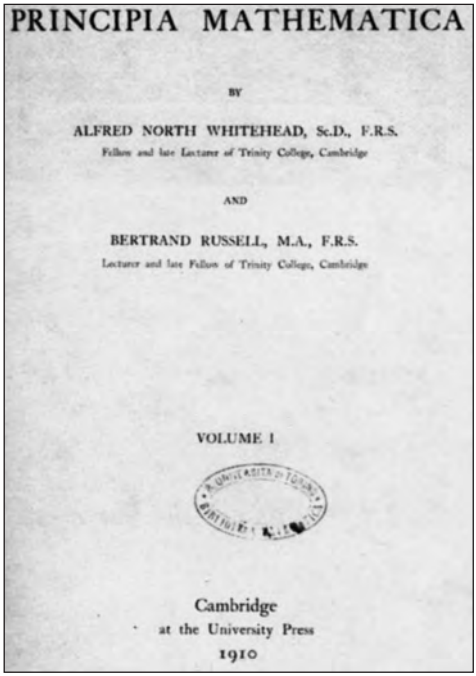
Problema era că, deşi sistemul axiomatic al lui Peano putea reproduce într-adevăr legile cunoscute ale aritmeticii (atunci când erau introduse definiții suplimentare), numerele naturale nu puteau fi identificate în mod unic.

Pasul următor a fost făcut de Bertrand Russell. El susținea că ideea inițială a lui Frege de a deduce aritmetica din logică era totuşi calea de urmat. În consecință, Russell a creat, împreună cu Alfred North Whitehead (figura 50) o capodoperă a logicii – cele trei volume din *Principia mathematica*. Cu excepția *Organon*-ului lui Aristotel, aceasta a fost pesemne cartea cu cel mai mare impact din istoria logicii (figura 51 prezintă pagina de gardă a primei ediții).

În *Principia*, Russell şi Whitehead susțineau că matematica e în esență o detaliere a legilor logicii, fără ca între matematică şi logică să se poată trasa o graniță precisă. Pentru a ajunge la o prezentare coerentă, antinomiile şi paradoxurile (mai fuseseră descoperite

și altele în afară de paradoxul lui Russell) trebuiau cumva ținute sub control, iar aceasta presupunea jonglerii logice complicate. Russell credea că paradoxurile apăreau numai din cauza unui „cerc vicios“ în care erau definite entități în funcție de o mulțime de obiecte care conținea entitatea definită. El spunea: „Dacă spun «Napoleon avea toate calitățile pentru a fi un mare general», trebuie să definesc «calitățile» în așa fel încât să nu includă ceea ce spun acum, adică «a avea toate calitățile care fac un mare general» nu trebuie să fie ea însăși o calitate în sensul presupus.“

Pentru a evita paradoxul, Russell a propus o *teorie a tipurilor*, în care o mulțime (sau clasă) aparține unui tip logic mai înalt decât cel căruia îi aparțin membrii ei. De pildă, toți jucătorii individuali


PRINCIPIA MATHEMATICA

BY

ALFRED NORTH WHITEHEAD, Sc.D., F.R.S.
Fellow and late Lecturer of Trinity College, Cambridge

AND

BERTRAND RUSSELL, M.A., F.R.S.
Lecturer and late Fellow of Trinity College, Cambridge

VOLUME I

Cambridge
at the University Press
1910

Figura 51

din echipa de fotbal Dallas Cowboys sunt de tipul 0. Echipa Dallas Cowboys, care este o mulțime de jucători, este de tipul 1. Liga Națională de Fotbal, care este o mulțime de echipe, este de tipul 2; un ansamblu de ligi (dacă ar exista vreunul) ar fi de tipul 3 etc. În această schemă, simpla noțiune „o mulțime care e membră a ei înseși" nu e nici adevărată, nici falsă, ci pur și simplu fără sens. Prin urmare, nu ne confruntăm niciodată cu paradoxuri de tipul paradoxului lui Russell.

Nu încape îndoială că *Principia* era o realizare măreață în domeniul logicii, dar nu putea fi considerată ca îndelung căutata fundamentare a matematicii. Teoria tipurilor propusă de Russell era privită de mulți ca un remediu oarecum artificial la problema paradoxurilor – și, în plus, producea ramificații tulburător de complexe. De pildă, numerele raționale (adică fracțiile simple) se dovedeau a fi de un tip mai înalt decât numerele naturale. Pentru a evita unele dintre aceste complicații, Russell și Whitehead au introdus o axiomă suplimentară – axioma reductibilității, care, la rândul ei, a generat serioase controverse și neîncredere.

Căi mai elegante de a elimina paradoxurile au fost în cele din urmă propuse de matematicienii Ernst Zermelo și Abraham Fraenkel. Ei au reușit să axiomatizeze teoria mulțimilor într-un mod coerent și să reproducă majoritatea rezultatelor din teoria mulțimilor. Părea să fie măcar o împlinire parțială a visului platonicienilor. Dacă teoria mulțimilor și logica erau într-adevăr două fețe ale aceleiași monede, atunci o fundamentare solidă a teoriei mulțimilor implica o fundamentare solidă a logicii. Dacă, în plus, o mare parte a matematicii decurgea din logică, atunci aceasta dădea matematicii un fel de certitudine obiectivă, care putea fi eventual folosită pentru a explica eficacitatea matematicii. Din păcate, platonicienii nu s-au putut bucura prea mult timp, pentru că erau pe punctul să aibă de-a face cu un caz grav de déjà-vu.

Se repetă oare criza neeuclidiană?

În 1908, matematicianul german Ernst Zermelo (1871–1953) urma o cale foarte asemănătoare celei deschise de Euclid pe la 300 î. Cr. Euclid a formulat câteva postulate nedemonstrate, dar pe care le-a presupus de la sine-înțelese, despre puncte și drepte, iar apoi a construit geometria pe baza acestor axiome. Zermelo – care descoperise independent paradoxul lui Russell încă din 1900 – a propus un mod de a construi teoria mulțimilor pe o bază axiomatică analogă. Paradoxul lui Russell era evitat în această teorie printr-o alegere atentă a principiilor de construcție care eliminau ideile contradictorii de genul „mulțimii tuturor mulțimilor". Schema lui Zermelo a fost dezvoltată în 1922 de matematicianul israelian Abraham Fraenkel (1891–1965) pentru a deveni ceea ce se numește teoria mulțimilor Zermelo–Fraenkel (alte modificări importante au fost operate de John von Neumann în 1925). Lucrurile ar fi fost aproape perfecte (mai rămânea de demonstrat caracterul necontradictoriu) dacă n-ar fi apărut anumite bănuieli. Una dintre axiome – *axioma alegerii* – le dădea dureri de cap matematicienilor, întocmai ca faimoasa „a cincea" axiomă a lui Euclid. Simplu spus, axioma alegerii afirmă: Dacă *X* este un ansamblu (mulțime) de mulțimi nevide, atunci putem alege câte un singur element din fiecare mulțime din *X* pentru a forma o nouă mulțime *Y*. Se poate ușor verifica adevărul acestei afirmații dacă ansamblul *X* este finit. De pildă, dacă avem o sută de cutii, fiecare conținând cel puțin o bilă, putem alege o bilă din fiecare cutie pentru a forma o nouă mulțime *Y* care conține o sută de bile. În acest caz, nu avem nevoie de o axiomă specială; putem demonstra că o alegere e posibilă. Afirmația este adevărată chiar și pentru ansambluri *X* infinite, atâta timp cât putem preciza exact cum facem alegerea. Să ne imaginăm, de pildă, un ansamblu infinit de mulțimi nevide de numere naturale. Membrii acestui ansamblu pot fi mulțimi de tipul {2, 6, 7}, {1, 0}, {346, 5, 11, 1257}, {toate numerele naturale dintre 381 și 10 457} și așa mai departe. În fiecare mulțime de numere naturale, există întotdeauna un cel mai mic element. Alegerea

noastră poate fi descrisă în mod unic astfel: „Din fiecare mulțime alegem cel mai mic element". În acest caz, putem evita iarăși nevoia de a avea o axiomă a alegerii. Problema apare pentru ansamblurile infinite atunci când nu putem defini o alegere. În asemenea condiții, procesul alegerii nu se sfârșește niciodată, iar existența unei mulțimi conținând câte un singur element din fiecare membru al ansamblului X devine o chestiune de credință.

De la bun început axioma alegerii a provocat mari controverse printre matematicieni. Faptul că axioma afirmă existența anumitor obiecte matematice (adică alegeri) fără a oferi exemplul concret al vreunuia dintre ele, a atras fulgere, mai ales din partea adepților școlii de gândire cunoscute drept *constructivism* (înrudit filozofic cu *intuiționismul*). Constructiviștii susțineau că tot ce există trebuie să poată fi construit explicit. Alți matematicieni înclinau și ei să evite axioma alegerii și foloseau numai celelalte axiome din teoria mulțimilor Zermelo–Fraenkel.

Neajunsurile axiomei alegerii i-au făcut pe matematicieni să se întrebe dacă ea nu putea fi demonstrată sau respinsă pe baza celorlalte axiome. Se repeta practic istoria celei de-a cincea axiome a lui Euclid. Un răspuns parțial a fost dat în cele din urmă la sfârșitul anilor 1930. Kurt Gödel (1906–1978), unul dintre cei mai mari logicieni din toate timpurile, a demonstrat că axioma alegerii și o altă faimoasă conjectură datorată fondatorului teoriei mulțimilor Georg Cantor, cunoscută drept *ipoteza continuumului*, nu intrau în contradicție cu celelalte axiome Zermelo–Fraenkel. Adică, nici una dintre cele două ipoteze nu putea fi respinsă folosind celelalte axiome standard ale teoriei mulțimilor. Demonstrații suplimentare datorate matematicianului american Paul Cohen (1934–2007, care din păcate a decedat pe când scriam această carte) au stabilit în 1963 completa independență a axiomei alegerii și a ipotezei continuumului. Cu alte cuvinte, axioma alegerii nu poate fi nici demonstrată, nici respinsă folosind celelalte axiome ale teoriei mulțimilor. În mod asemănător, ipoteza continuumului nu poate fi nici demonstrată, nici respinsă folosind același set de axiome, chiar dacă includem axioma alegerii.

Acest rezultat a avut consecințe filozofice spectaculoase. Ca și în cazul geometriilor neeuclidiene din secolul XIX, nu exista o unică teorie definitivă a mulțimilor, ci cel puțin patru! Se puteau face diferite ipoteze privind mulțimile infinite pentru a obține teorii ale mulțimilor care se exclud reciproc. De pildă, se putea presupune că atât axioma alegerii, cât și ipoteza continuumului erau adevărate, iar atunci se obținea o versiune, sau că erau ambele false, iar atunci se obținea o teorie complet diferită. În mod asemănător, presupunând valabilitatea uneia dintre cele două axiome și negând-o pe a celeilalte, se obțineau alte două teorii ale mulțimilor.

Se repeta criza neeuclidiană, dar situația era încă mai gravă. Rolul fundamental al teoriei mulțimilor ca posibilă bază a întregii matematici făcea ca, pentru platonicieni, lucrurile să stea și mai rău. Dacă se puteau într-adevăr formula mai multe teorii ale mulțimilor prin simpla alegere a unui set diferit de axiome, nu era aceasta o dovadă că matematica nu e decât o invenție omenească? Victoria formaliștilor părea asigurată.

Un adevăr incomplet

În timp ce Frege era preocupat de sensul axiomelor, principalul partizan al formalismului, marele matematician german David Hilbert (figura 52) era împotriva oricărei interpretări a formulelor matematice. Pe Hilbert nu-l interesa dacă matematica putea fi dedusă din noțiuni logice. Pentru el, matematica însemna pur și simplu un ansamblu de formule fără sens – tipare structurate alcătuite din simboluri arbitrare. Sarcina de a garanta fundamentele matematicii a fost pusă de Hilbert pe seama unei noi discipline, numită de el „metamatematică“. Metamatematica trebuia să folosească metodele de analiză ale matematicii pentru a demonstra că întregul proces la care apelează sistemul formal pentru a obține teoreme din axiome, urmând regulile stricte ale deducției, nu conține

contradicții. Altfel spus, Hilbert credea că putea demonstra matematic că matematica funcționează. Iată propriile sale cuvinte:

> Cercetările mele privind noile fundamente ale matematicii au ca scop pur și simplu eliminarea, o dată pentru totdeauna, a oricărei îndoieli legate de deducția matematică. […] Tot ce însemna înainte matematică trebuie riguros formalizat, astfel încât matematica propriu-zisă sau matematica în sens strict să devină un rezervor de formule. […] În plus față de această matematică propriu-zisă formalizată, avem o matematică întru câtva nouă: o matematică necesară pentru a salva matematica, în care – spre deosebire de metodele pur formale de deducție din matematica propriu-zisă – se aplică deducția contextuală, dar numai pentru a demonstra coerența axiomelor. […] Astfel, dezvoltarea științei matematicii ca întreg are loc pe două căi ce alternează în permanență: pe de o parte, deducem formule demonstrabile din axiome prin deducție formală, pe de alta, adăugăm noi axiome și le demonstrăm caracterul necontradictoriu prin deducție contextuală.

Programul lui Hilbert sacrifica sensul pentru a salva fundamentele. Prin urmare, pentru adepții săi formaliști matematica era într-adevăr doar un joc, dar scopul lor era să demonstreze riguros că jocul era perfect coerent. După toate progresele făcute în axiomatizare, împlinirea acestui vis formalist al „teoriei demonstrației“* părea să fie la o aruncătură de băț.

Nu toți erau convinși însă că drumul pe care pornise Hilbert era cel bun. Ludwig Wittgenstein (1889–1951), considerat de unii drept cel mai mare filozof din secolul XX, vedea în metamatematica lui Hilbert o pierdere de vreme: „Nu putem stabili o regulă pentru aplicarea altei reguli“, spunea el. Cu alte cuvinte,

---

* Teoria demonstrației este acea ramură a logicii propusă de Hilbert (în celebra sa prelegere la al doilea Congres Internațional al Matematicienilor din 1900) pentru a rezolva problema coerenței matematicii, și reprezintă o abordare particulară în cadrul metamatematicii. (*N. t.*)

Figura 52

Wittgenstein nu credea că înțelegerea unui „joc“ putea depinde de construirea altuia: „Dacă nu mi-e limpede care e natura matematicii, nici o demonstrație nu mă poate ajuta.“ Cu toate acestea, nimeni nu se aștepta la trăsnetul ce urma să cadă. Kurt Gödel, un tânăr de douăzeci și patru de ani, avea să dea o lovitură fatală formalismului.

Kurt Gödel (figura 53) s-a născut pe 28 aprilie 1906 în orașul morav cunoscut mai târziu sub numele ceh Brno. Orașul făcea pe atunci parte din Imperiul Austro-Ungar, iar Gödel provenea dintr-o familie în care se vorbea germana. Tatăl, Rudolf Gödel, era directorul unei fabrici de textile, iar mama, Marianne Gödel, a avut grijă ca tânărul Kurt să studieze temeinic matematica, istoria, limbile străine și religia. În adolescență, Gödel prinde gustul matematicii și filozofiei, iar la 18 ani intră la Universitatea din Viena, unde îl atrage în primul rând logica matematică. E fascinat în special de *Principia mathematica* ale lui Russell și Whitehead și de programul lui Hilbert, și își alege ca temă pentru teza de doctorat problema *completitudinii*. În esență, scopul cercetărilor sale era

de a determina dacă abordarea formală susținută de Hilbert era suficientă pentru a genera toate propozițiile adevărate din matematică. Gödel își susține doctoratul în 1930, iar un an mai târziu publică *teoremele de incompletitudine*, care transmit unde de șoc în lumea matematicii și a filozofiei.

În limbaj pur matematic, cele două teoreme sună prea puțin incitant:

1. Orice sistem formal consistent *S*, în care pot fi efectuate anumite operațiile aritmetice elementare, este incomplet în raport cu propozițiile aritmeticii elementare: există în *S* propoziții care nu pot fi nici demonstrate, nici infirmate.

2. Pentru orice sistem formal consistent *S,* în care pot fi efectuate anumite operații aritmetice elementare, consistența lui *S* nu poate fi demonstrată în cadrul lui *S*.

Cuvintele pot părea benigne, dar consecințele asupra programului formaliștilor erau imense. Simplu spus, teoremele de

Figura 53

incompletitudine demonstrau că programul formalist al lui Hilbert era condamnat de la bun început. Gödel a arătat că orice sistem formal care e suficient de puternic pentru a prezenta interes este fie incomplet, fie inconsistent – adică, în cel mai bun caz, există întotdeauna afirmații pe care sistemul formal nu le va putea nici demonstra, nici infirma. În cel mai rău caz, sistemul conduce la contradicții. Din moment ce, pentru orice propoziție *T*, fie *T*, fie non-*T* este adevărată, faptul că un sistem formal finit nu poate nici demonstra, nici infirma anumite propoziții înseamnă că vor exista întotdeauna propoziții adevărate și nedemonstrabile în acel sistem. Cu alte cuvinte, Gödel a demonstrat că nici un sistem formal alcătuit dintr-un set finit de axiome și reguli de deducție nu va putea *vreodată* cuprinde întregul corp de adevăruri ale matematicii. Tot ce putem spera este că axiomatizările acceptate sunt doar incomplete, nu și inconsistente.

De fapt, Gödel credea că există o idee de adevăr matematic, platoniciană și independentă. Într-un articol din 1947, scria:

> Dar, în pofida depărtării lor față de experiența senzorială, avem într-adevăr un fel de percepție a obiectelor din teoria mulțimilor, după cum se vede din faptul că axiomele ni se impun ca adevărate. Nu văd nici un motiv pentru care să avem mai puțină încredere în acest gen de percepție, adică în intuiția matematică, decât în percepția senzorială.

Printr-o ironie a sorții, chiar în momentul în care formaliștii se pregăteau de marșul triumfal, Kurt Gödel – platonician declarat – a abătut furtuna asupra paradei programului formalist.

Faimosul matematician John von Neumann (1903–1957), care preda pe atunci despre cercetările lui Hilbert, și-a anulat restul cursului planificat și a dedicat timpul rămas descoperirilor lui Gödel.

Omul Gödel era la fel de complex ca teoremele sale. În 1940, a fugit din Austria nazistă împreună cu soția sa Adele, pentru a ocupa un post la Institutul pentru Studii Avansate de la Princeton, New Jersey. Acolo s-a împrietenit cu Albert Einstein, pe care-l

însoțea în lungi plimbări. Când Gödel a cerut cetățenia americană în 1947, Einstein a fost cel care, împreună cu matematicianul și economistul Oskar Morgenstern (1902–1977) de la Universitatea Princeton, l-a însoțit pe Gödel la interviul de la Serviciului de Imigrație și Naturalizare. Cele petrecute cu ocazia acestui interviu sunt îndeobște cunoscute, dar spun atât de multe despre personalitatea lui Gödel, încât le voi reda în întregime, exact așa cum și le-a amintit Oskar Morgenstern pe 13 septembrie 1971. Le sunt recunoscător doamnei Dorothy Morgenstern Thomas, văduva lui Morgenstern, și Institutului pentru Studii Avansate că mi-au oferit o copie a documentului:

> În 1946, Gödel a făcut cerere pentru a deveni cetățean american. M-a rugat pe mine să-i fiu martor, iar ca al doilea martor l-a ales pe Albert Einstein, care a acceptat și el cu dragă inimă. Einstein și cu mine ne întâlneam din când în când și ne tot întrebam ce se putea întâmpla în timpul rămas până la procedurile de naturalizare, ba chiar și cu ocazia lor.
>
> Gödel, pe care îl vedeam, bineînțeles, deseori în aceste luni dinaintea evenimentului, se pregătea temeinic. Fiind un om foarte meticulos, a început prin a studia istoria primilor oameni care s-au stabilit în America de Nord. A ajuns apoi la istoria amerindienilor, la diversele triburi etc. Mă suna frecvent la telefon pentru bibliografie, pe care o cerceta cu toată atenția. Au apărut treptat multe întrebări și, desigur, multe îndoieli privind veridicitatea acestor relatări și împrejurările pe care le dezvăluiau. Gödel a continuat în următoarele săptămâni cu studiul istoriei americane, concentrându-se mai ales asupra problemelor de drept constituțional. Așa a ajuns să se intereseze de Princeton, și a vrut să afle de la mine unde anume e granița dintre district și vechiul oraș. Am încercat să-i explic că toate astea erau absolut inutile, dar, bineînțeles, în van. S-a încăpățânat să caute toate datele de care credea că are nevoie, așa încât i-am oferit informațiile cerute, inclusiv cele despre Princeton. A vrut apoi să știe

cum a fost ales Consiliul Orășenesc, Consiliul Districtului, cine era primarul și cum funcționa Consiliul Districtului. Credea că i se puteau pune întrebări pe aceste teme. Dacă se va dovedi că nu cunoaște orașul în care trăiește, va face o impresie proastă.

Am încercat să-l conving că nu se puneau niciodată asemenea întrebări, că majoritatea întrebărilor erau într-adevăr formale și putea răspunde la ele cu ușurință; cel mult putea fi întrebat ce fel de guvern avem în această țară, cum se numește cea mai înaltă Curte sau alte întrebări de genul ăsta. Oricum, el a continuat să studieze Constituția.

Dar iată că a apărut un element interesant. Foarte tulburat, mi-a spus că, studiind Constituția, a găsit spre deznădejdea sa anumite contradicții interne și că putea demonstra cum, pe o cale perfect legală, era posibil ca cineva să devină dictator și să instaureze un regim fascist, ceea ce nu fusese niciodată în intenția celor care redactaseră Constituția. I-am spus că era extrem de improbabil ca asemenea evenimente să se petreacă vreodată, chiar presupunând că avea dreptate, lucru de care, firește, mă îndoiam. Dar era insistent, așa încât am discutat mult pe această temă. Am încercat să-l conving că ar trebui să evite asemenea subiecte la examinarea în fața tribunalului din Trenton, și l-am prevenit și pe Einstein: era îngrozit că lui Gödel îi trecuse prin minte o asemenea idee, și i-a spus și el să nu-și mai bată capul cu lucrurile astea și să nu le mai pomenească.

Au trecut mai multe luni și, în fine, a sosit data examinării la Trenton. L-am luat pe Gödel cu mașina în ziua aceea. S-a așezat în spate, pe urmă ne-am dus să-l luăm pe Einstein de la locuința lui din Mercer Street, iar de acolo ne-am îndreptat spre Trenton. Pe drum, Einstein s-a întors spre Gödel și l-a întrebat: „Gödel, ești *cu adevărat* pregătit pentru examinare?“ Firește, remarca l-a necăjit teribil pe Gödel – exact ce-și propusese Einstein, care se amuza copios văzând expresia de pe chipul lui Gödel. Când am ajuns la Trenton,

am fost conduși într-o încăpere mare și, deși în mod normal martorii sunt interogați separat față de candidat, din cauza prezenței lui Einstein s-a făcut o excepție și am fost invitați toți trei să ne așezăm alături, cu Gödel la mijloc. Examinatorul ne-a întrebat pe Einstein și pe mine dacă credeam că Gödel ar fi un bun cetățean. L-am asigurat că ar fi, fără îndoială, că era un om remarcabil etc. Apoi s-a întors spre Gödel și i-a spus: „Domnule Gödel, de unde veniți?“

Gödel: De unde vin? Din Austria.

Examinatorul: Ce fel de guvern aveați în Austria?

Gödel: Era republică, dar constituția era astfel încât s-a transformat până la urmă într-o dictatură.

Examinatorul: O! Asta e foarte rău. Așa ceva nu s-ar putea întâmpla în țara asta.

Gödel: Ba da, pot s-o *demonstrez*.

Dintre toate temele posibile, tocmai cea critică a fost aleasă de examinator. Einstein și cu mine ne priveam îngroziți în timpul acestui schimb de replici; examinatorul a fost totuși suficient de inteligent pentru a-l reduce repede la tăcere pe Gödel spunând „O, Doamne, să nu intrăm în acest subiect“, și, spre marea noastră ușurare, a întrerupt examinarea în acest punct. În cele din urmă am plecat, iar când ne îndreptam spre lift un bărbat a alergat după noi cu o hârtie și un stilou și i-a cerut lui Einstein un autograf. Einstein s-a executat. Când coboram cu liftul, m-am întors spre Einstein și i-am spus: „Trebuie să fie cumplit să fii persecutat în felul ăsta de atâția oameni.“ Einstein mi-a răspuns: „De fapt, nu e decât ultima rămășiță a canibalismului.“ N-am înțeles și i-am zis: „Cum așa?“ Mi-a răspuns: „Păi, da, pe vremuri voiau sângele tău, acum vor cerneala ta.“

> Pe urmă am plecat cu mașina înapoi la Princeton, iar când am ajuns la intersecția cu Mercer Street l-am întrebat pe Einstein dacă voia să se ducă la institut sau acasă. Mi-a răspuns: „Du-mă acasă, munca mea oricum nu mai valorează nimic.“ Apoi a citat dintr-un cântec politic american (din păcate, nu-mi amintesc cuvintele, poate le-am notat pe undeva, oricum le-aș recunoaște dacă le-aș auzi). În drumul spre casă, Einstein s-a mai întors o dată către Gödel: „Gödel, ăsta a fost penultimul tău examen.“ Gödel: „Aoleu! Să nu-mi spui că mai am de trecut încă unul!“ – și se îngrijorase deja. La care Einstein: „Gödel, următorul examen îl dai când pășești în mormânt.“ Gödel: „Dar, Einstein, eu nu păşesc în mormânt“, iar Einstein i-a zis: „Gödel, era o glumă!“, și s-au despărțit cu aceste cuvinte. L-am condus pe Gödel acasă. Toată lumea era ușurată că se terminase povestea asta colosală; Gödel avea din nou mintea liberă să se gândească la probleme de filozofie și logică.

Spre sfârșitul vieții, Gödel a suferit grave tulburări mentale, ajungând să refuze să mănânce. A murit pe 14 ianuarie 1978, de malnutriție și epuizare.

Contrar unor idei vehiculate, din teoremele de incompletitudine ale lui Gödel nu rezultă că anumite adevăruri nu vor fi niciodată cunoscute. Teoremele demonstrează în schimb slăbiciunile și neajunsurile sistemelor formale. Poate părea deci surprinzător că, în pofida importanței teoremelor pentru filozofia matematicii, impactul lor asupra eficacității matematicii ca mecanism de construcție a teoriilor a fost minim. De fapt, în deceniile din preajma publicării demonstrației lui Gödel, matematica repurta succese spectaculoase prin teoriile fizice ale universului. Departe de a fi abandonată ca nefiabilă, matematica, împreună cu concluziile ei logice, devenea tot mai importantă pentru înțelegerea cosmosului.

Ceea ce însemna însă că misterul „imprevizibilei eficacități“ a matematicii devenea și mai greu de pătruns. Să ne gândim o clipă ce s-ar fi întâmplat dacă întreprinderea logicistă ar fi izbutit pe deplin. Aceasta ar fi însemnat că matematica provine în

întregime din logică – pur și simplu din legile gândirii. Dar cum ar fi putut o asemenea știință deductivă să se potrivească atât de bine cu fenomenele naturale? Care e relația dintre logica formală (poate ar trebui chiar să spunem logica formală umană) și cosmos? Răspunsul nu s-a limpezit după Hilbert și Gödel. Acum, tot ce exista era un „joc“ formal incomplet, exprimat în limbaj matematic. Cum puteau modele întemeiate pe un sistem atât de „nefiabil“ să ducă la o înțelegere profundă a universului și a felului în care funcționează? Înainte de a încerca măcar să abordez aceste întrebări, vreau să le precizez puțin examinând câteva cazuri care demonstrează subtilitățile eficacității matematicii.

Capitolul 8

Eficacitate imprevizibilă?

În capitolul 1 am văzut că succesul matematicii în teoriile din fizică prezintă două aspecte: pe unul l-am numit „activ“, pe celălalt, „pasiv“. Latura „activă“ reflectă faptul că oamenii de știință formulează legile naturii în termeni matematici manifest aplicabili – altfel spus, ei folosesc entități, relații și ecuații matematice care au fost elaborate ținând cont de o aplicație precisă, adesea chiar pentru subiectul în discuție. În aceste cazuri, cercetătorii se sprijină de regulă pe asemănarea dintre proprietățile conceptelor matematice și fenomenele observate sau rezultatele experimentale. Eficacitatea matematicii poate să nu pară chiar atât de surprinzătoare în aceste cazuri, din moment ce se poate spune că teoriile sunt croite anume pentru a se potrivi cu observațiile. Există totuși ceva uimitor în această latură „activă“, care ține de precizie și la care vom reveni în acest capitol. Eficacitatea „pasivă“ se referă la cazuri în care teorii matematice complet abstracte au fost elaborate fără vreo intenție de aplicare, pentru ca mai târziu să se transforme în modele fizice cu o mare forță de predicție. Teoria nodurilor oferă un exemplu spectaculos de combinație între eficacitatea activă și cea pasivă.

Noduri

Pe seama nodurilor au apărut chiar și legende. Vă amintiți poate de legenda greacă a nodului gordian. Un oracol le-a prezis cetățenilor Frigiei că următorul lor rege va fi primul bărbat care va

intra în capitală într-o căruță trasă de boi. Gordios, un țăran neprevenit care-și mâna căruța spre oraș, a devenit astfel rege. Plin de recunoștință, Gordios și-a închinat căruța zeilor și a legat-o de un stâlp cu un nod complicat pe care nimeni nu-l putea dezlega. O profeție ulterioară a prezis că acela care va desface nodul va deveni regele Asiei. Destinul a vrut ca nodul să fie desfăcut (în anul 333 î. Cr.) de Alexandru Macedon, care a devenit apoi într-adevăr regele Asiei. Soluția găsită de Alexandru pentru nodul gordian n-a fost una tocmai subtilă sau măcar onestă – se spune că a tăiat nodul cu sabia!

Dar nu trebuie să ne întoarcem până la Grecia antică pentru a întâlni noduri. Un copil legându-și șireturile, o fată împletindu-și părul, o bunică tricotând un pulover sau un marinar legându-și barca la țărm, toți folosesc un nod sau altul. Diverselor noduri li s-au dat nume pline de imaginație: „nod pescăresc“, „lațul englezului“, „labă de pisică“ [gură de știucă – nod marinăresc], „nodul iubitului“ [nod dublu], „bunicuța“ [nod marinăresc], „nodul spânzuratului“*. Nodurile marinărești, în special, au fost considerate suficient de importante pentru ca, în Anglia secolului XVII, să fi apărut o serie întreagă de cărți pe tema lor. Una dintre aceste cărți a fost scrisă de aventurierul englez John Smith (1580–1631), cunoscut pentru relația lui cu prințesa amerindiană Pocahontas.

Teoria matematică a nodurilor s-a născut în 1771, printr-un articol al matematicianului francez Alexandre Théophile Vandermonde (1735–1796). Vandermonde a fost primul care a înțeles că nodurile pot fi studiate ca parte a *geometriei poziției*, care se ocupă cu relațiile ce depind doar de poziție, ignorând dimensiunile și calculul cantităților. Următorul care a jucat un rol în teoria nodurilor a fost Carl Friederich Gauss, „prințul matematicii“. Câteva dintre notele lui Gauss conțin desene și descrieri detaliate ale nodurilor, împreună cu unele studii analitice ale proprietăților acestora. Oricât de importante au fost lucrările lui Vandermonde, Gauss și ale altor matematicieni din secolul XIX, principalul impuls

* Pentru plasticitatea termenilor, am dat traducerea literală. (*N. t.*)

pentru teoria matematică modernă a nodurilor a venit dintr-o direcție neașteptată – încercarea de a explica structura materiei. Ideea s-a născut în mintea faimosului fizician englez William Thomson, mai bine cunoscut acum ca Lord Kelvin (1824 – 1907). Eforturile lui Thomson s-au concentrat pe formularea unei teorii a atomilor, cărămizile constitutive ale materiei. Potrivit ipotezei sale pline de imaginație, atomii erau tuburi de eter înnodate – eterul fiind misterioasa substanță despre care se credea că umple întreg spațiul. Diversitatea elementelor chimice putea fi explicată, în cadrul acestui model, prin diversitatea nodurilor.

Dacă speculația lui Thomson ne pare azi aproape nebunească, asta se întâmplă numai pentru că am avut un secol întreg pentru a ne obișnui cu modelul corect al atomului (și a-l testa experimental), model în care electronii orbitează în jurul nucleului atomic. Dar Thomson trăia în Anglia anilor 1860 și era impresionat de stabilitatea inelelor complexe de fum și de capacitatea lor de a vibra – două proprietăți considerate la acea vreme esențiale pentru a sta la baza unui model atomic. Ca să găsească un echivalent al tabelului periodic al elementelor folosind nodurile, Thomson trebuia să le poată clasifica – să afle ce noduri diferite sunt posibile –, iar această nevoie de clasificare a trezit interesul pentru matematica nodurilor.

După cum am văzut în capitolul 1, un nod matematic arată ca un nod obișnuit de pe o sfoară, dar capetele sforii sunt unite. Cu alte cuvinte, un nod matematic este o curbă închisă, fără capete libere. Câteva exemple sunt prezentate în figura 54, unde nodurile tridimensionale sunt reprezentate prin proiecțiile lor în plan. Poziția în spațiu a oricăror două fire care se încrucișează este indicată în figură printr-o linie întreruptă care desemnează firul inferior. Cel mai simplu nod – cel numit *dezlegat* – este pur și simplu o curbă circulară (figura 54 a). *Nodul treflă* (figura 54b) are trei încrucișări de fire, *iar nodul în formă de opt* (figura 54c) are patru încrucișări. În teoria lui Thomson, aceste trei noduri puteau fi, în principiu, modelele a trei atomi de complexitate crescândă, de pildă, hidrogenul, carbonul și oxigenul. Era însă nevoie de o

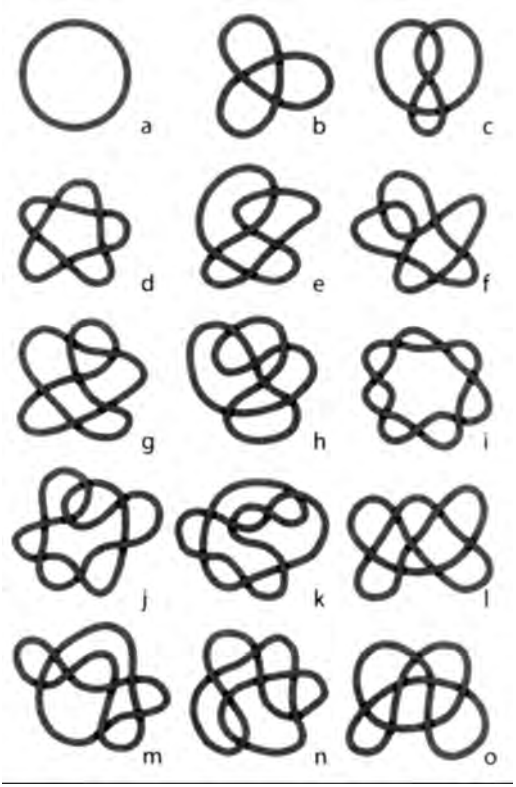


Figura 54

clasificare completă a nodurilor, iar cel care s-a apucat să facă ordine între noduri a fost prietenul lui Thomson, matematicianul scoțian Peter Guthrie Tait (1831–1901).

Întrebările pe care matematicienii și le pun despre noduri nu se deosebesc mult de cele pe care ni le putem pune despre o sfoară obișnuită înnodată sau despre un ghem încâlcit. Este cu adevărat înnodat? Este un nod echivalent cu altul? Sensul acestei din urmă întrebări este: poți deforma un nod pentru a obține forma altuia, fără să rupi firele sau să treci firele unele prin altele, ca la inelele

chinezești legate ale iluziniștilor? Importanța acestei întrebări e demonstrată în figura 55, care arată că prin anumite operații se pot obține două reprezentări diferite ale unui același nod. Scopul teoriei nodurilor este găsirea unui mijloc precis de a demonstra că unele noduri (ca nodul treflă și nodul în formă de opt; figurile 54b și 54c) sunt cu adevărat diferite, ignorând în același timp diferențele superficiale dintre alte noduri, cum sunt cele două noduri din figura 55.

Tait a ales calea grea în munca sa de clasificare. Fără vreun principiu matematic riguros care să-l călăuzească, a făcut liste de curbe cu o încrucișare, două încrucișări, trei încrucișări etc. În colaborare cu reverendul Thomas Penyngton Kirkman (1806–1895), care era și matematician amator, a început să analizeze curbele pentru a elimina repetițiile prin noduri echivalente. Sarcina nu era banală. Trebuie să înțelegem că la fiecare încrucișare există două moduri de a alege care fir trece deasupra. Aceasta înseamnă că, dacă o curbă are, să zicem, șapte încrucișări, trebuie considerate $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$ de noduri. Cu alte cuvinte, viața omenească este prea scurtă pentru a încheia în acest mod intuitiv clasificarea curbelor cu zeci de noduri. Munca lui Tait nu a trecut totuși neobservată. Marele fizician James Clerk Maxwell, cel care

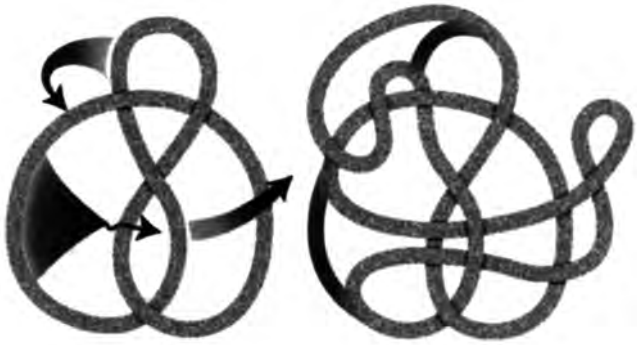


Figura 55

a formulat teoria clasică a electricității și magnetismului, a tratat cu respect teoria atomică lui Thomson, afirmând că „satisface mai multe condiții decât orice atom considerat până acum“. Conștient fiind de contribuția lui Tait, Maxwell i-a dedicat următorul catren:

Transformă ghemul de noduri
Într-o perfectă împletire
De bucle și legături
Care se întrepătrund.

Până în 1877, Tait clasificase noduri alternante având până la șapte încrucișări. Nodurile alternante sunt cele în care încrucișările trec alternativ pe deasupra și pe dedesubt, ca într-un covor țesut. Tait a făcut și câteva descoperiri mai pragmatice, sub forma unor principii elementare, numite mai apoi conjecturile lui Tait. Aceste conjecturi sunt atât de subtile, încât au rezistat tuturor încercărilor de a fi demonstrate până la sfârșitul anilor 1980. În 1885, Tait a publicat un tabel de noduri cu până la zece încrucișări, și s-a hotărât să se oprească. În mod independent, profesorul Charles Newton Little (1858–1923) de la Universitatea din Nebraska a publicat și el (în 1899) tabele de noduri nealternante cu cel mult zece încrucișări.

Tait i-a fost întotdeauna drag Lordului Kelvin. Cu ocazia unei ceremonii la Peterhouse, în Cambridge, unde a fost dezvelit un portret al lui Tait, Lord Kelvin a declarat:

> Îmi amintesc că Tait a spus odată că nu merită să trăiești decât pentru știință. A spus-o cu toată sinceritatea, dar Tait însuși a dovedit contrariul. Era un mare cititor. Îi știa pe dinafară pe Shakespeare, Dickens și Thackeray. Avea o memorie formidabilă. Dacă citea un lucru care-i plăcea, nu-l mai uita niciodată.

Din păcate, pe când Tait și Little își încheiaseră eroica muncă de clasificare a nodurilor, teoria lui Kelvin era complet infirmată ca posibilă teorie atomică. Preocuparea pentru noduri a continuat totuși, având un statut de sine stătător, cu deosebirea că „studiul

nodurilor a devenit o ramură ezoterică a matematicii pure“, după cum spunea matematicianul Michael Atiyah.

Domeniul matematicii în care mărimea, netezimea și, într-un anume sens, chiar forma, sunt ignorate, se numește *topologie*. Topologia – geometria foii de cauciuc – studiază acele proprietăți care rămân neschimbate atunci când spațiul e întins sau deformat în orice fel (fără a-l rupe sau a-l găuri). Prin însăși natura lor, nodurile țin de topologie. În paranteză fie spus, matematicienii fac distincția între *noduri*, (bucle înnodate o dată), *multinoduri*, (ansambluri de bucle înnodate, împletite laolaltă), și *trese* (ansambluri de fire verticale legate de o bară orizontală prin ambele capete).

Dacă nu v-ați lăsat impresionați de dificultatea de a clasifica nodurile, iată un fapt grăitor. Tabelul lui Charles Little, publicat în 1899, după șase ani de muncă, conținea patruzeci și trei de noduri nealternante cu zece încrucișări. Acest tabel a fost studiat cu mare atenție de mulți matematicieni, și, timp de șaptezeci și cinci de ani, s-a crezut că era corect. Apoi, în 1974, avocatul și matematicianul newyorkez Kenneth Perko a făcut un experiment cu frânghii pe podeaua salonului său. Spre surpriza sa, a descoperit că două dintre nodurile din tabelul lui Little erau de fapt unul și același. Acum credem că există doar patruzeci și două de noduri nealternante cu zece încrucișări.

Deși secolul XX a fost martorul unor mari progrese în topologie, teoria nodurilor s-a dezvoltat mai lent. Unul dintre obiectivele matematicienilor era de a identifica proprietăți care să distingă nodurile între ele. Asemenea proprietăți se numesc *invarianți ai nodurilor* – cantități pentru care oricare două proiecții diferite ale aceluiași nod dau exact aceeași valoare. Cu alte cuvinte, un invariant ideal este ca o „amprentă digitală“ a nodului – o proprietate caracteristică ce nu se schimbă prin deformarea nodului. Poate că cel mai simplu invariant la care ne putem gândi este numărul minim de încrucișări într-un desen al nodului. De pildă, oricât ne-am strădui să desfacem nodul în formă de treflă (figura 54b), nu vom reduce niciodată numărul de încrucișări la mai puțin de trei. Din păcate, există mai multe motive pentru care numărul minim de

încrucișări nu e cel mai util invariant. Întâi, așa cum arată figura 55, nu e întotdeauna ușor de determinat dacă un nod a fost desenat cu numărul minim de încrucișări. În al doilea rând, și cel mai important, multe noduri diferite au același număr de încrucișări. În figura 54, de pildă, există trei noduri diferite cu șase încrucișări, și nu mai puțin de șapte noduri diferite cu șapte încrucișări. Numărul minim de încrucișări nu caracterizează, prin urmare, majoritatea nodurilor. În fine, numărul minim de încrucișări, prin chiar natura lui simplistă, nu spune prea multe despre proprietățile generale ale nodurilor.

Un progres în teoria nodurilor a fost făcut în 1928, când matematicianul american James Waddell Alexander (1888–1971) a descoperit un invariant numit *polinomul Alexander*. Polinomul Alexander este o expresie algebrică ce folosește aranjamentul încrucișărilor pentru a caracteriza nodul. Vestea bună era că, dacă două noduri aveau polinoame Alexander diferite, atunci nodurile erau într-adevăr diferite. Vestea proastă era că două noduri având același polinom puteau totuși să fie diferite. Deși extrem de util, polinomul Alexander nu era încă perfect pentru a deosebi nodurile.

Matematicienii au petrecut următoarele patru decenii studiind baza conceptuală a polinomului Alexander și pătrunzând mai adânc în înțelegerea proprietăților nodurilor. De ce intrau atât de adânc în acest domeniu? Desigur, nu de dragul vreunei aplicații practice – modelul atomic al lui Thomson fusese de mult uitat, iar la orizont nu apărea vreo problemă din știință, economie, arhitectură sau din oricare altă disciplină care să pară a avea nevoie de teoria nodurilor. Matematicienii studiau la nesfârșit nodurile pur și simplu fiindcă erau curioși! Pentru ei, ideea de a înțelege nodurile și principiile care le guvernează era cât se poate de frumoasă. Raza de lumină aruncată de polinomul Alexander era la fel de tentantă pentru matematicieni ca provocarea de a cuceri Everestul pentru George Mallory, care, întrebat de ce voia să escaladeze muntele, a dat faimosul răspuns „Pentru că e acolo“.

La sfârșitul anilor 1960, prolificul matematician anglo-american John Norton Conway a descoperit o metodă de a „deznoda“

nodurile treptat, dezvăluind astfel relația dintre noduri și polinoamele Alexander asociate. În particular, Conway a introdus două operații „chirurgicale“ simple de la care se poate porni pentru a defini un invariant al unui nod. Operațiile lui Conway, numite *flip* și *netezire*, sunt prezentate schematic în figura 56. La flip (figura 56a), încrucișarea e transformată prin trecerea firului superior sub firul inferior (figura arată cum se poate realiza această transformare cu o sfoară). Observați că flip schimbă în mod evident natura nodului. De pildă, vă puteți ușor convinge că nodul în formă de treflă din figura 54 va fi dezlegat (figura 54a) în urma unui flip. Operația de netezire a lui Conway elimina complet încrucișarea (figura 56b) legând, după tăiere, firele în mod „greșit“. Cu toate rezultatele obținute de Conway, matematicienii au rămas convinși timp de încă aproape două decenii că nu se puteau găsi alți invarianți (de tipul polinomului Alexander). Lucrurile s-au schimbat radical în 1984.

Matematicianul american de origine neozeelandeză Vaughan Jones nu se ocupa de noduri, ci de o lume și mai abstractă – una dintre entitățile matematice numite *algebre von Neumann*. Brusc, Jones a observat că o relație care apărea în algebrele von Neumann semăna suspect de mult cu o relație din teoria nodurilor, și s-a întâlnit cu Joan Birman, specialistă în teoria nodurilor de la Universitatea Columbia, pentru a discuta eventuale aplicații. Examinarea relației a dezvăluit până la urmă un invariant complet nou pentru noduri, botezat *polinomul Jones*. Polinomul Jones a fost imediat recunoscut drept un invariant mai precis decât polinomul Alexander. El face, de pildă, distincția între noduri și imaginile lor în oglindă (de exemplu, nodurile treflă drept și stâng din figura 57) pentru care polinoamele Alexander sunt identice. În plus, descoperirea lui Jones a generat un entuziasm fără precedent printre specialiștii în teoria nodurilor: anunțul noului invariant a declanșat asemenea frenezie, încât lumea nodurilor semăna brusc cu bursa într-o zi în care Rezerva Federală ar scădea pe neașteptate dobânzile.

Descoperirea lui Jones însemna mult mai mult decât un simplu progres în teoria nodurilor. Polinomul Jones lega brusc o diversi-

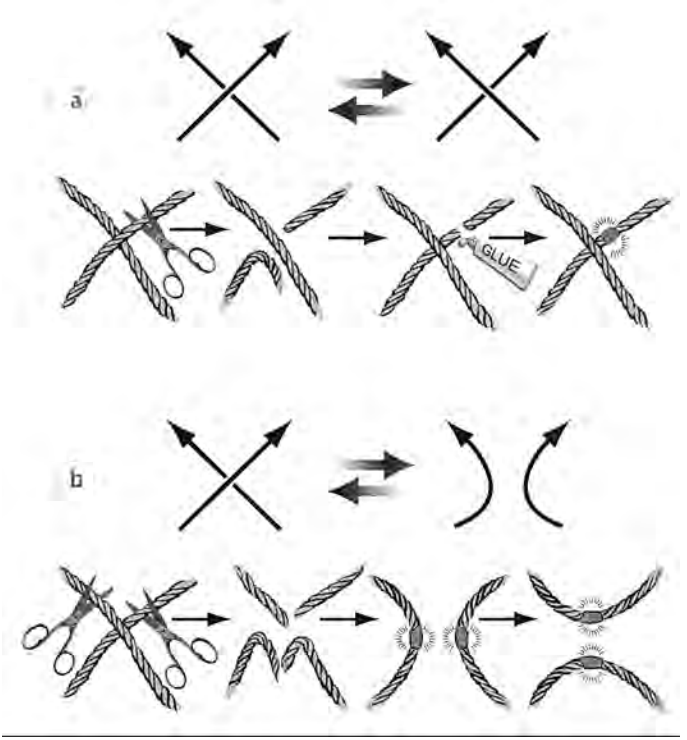


Figura 56

tate formidabilă de domenii din matematică şi fizică, de la mecanica statistică (folosită, de pildă, pentru a studia comportamentul ansamblelor mari de atomi şi molecule) la grupurile cuantice (o ramură a matematicii legată de fizica lumii subatomice). Matematicienii din întreaga lume au început să caute cu febrilitate invarianţi şi mai generali, care să depăşească atât polinomul Alexander, cât şi polinomul Jones. Această cursă matematică s-a încheiat cu pesemne cel mai uimitor rezultat din istoria competiţiilor ştiinţifice. La doar câteva luni după ce Jones şi-a anunţat noul polinom, patru grupuri, lucrând independent şi folosind trei abordări matematice diferite, au anunţat *simultan* descoperirea unui invariant

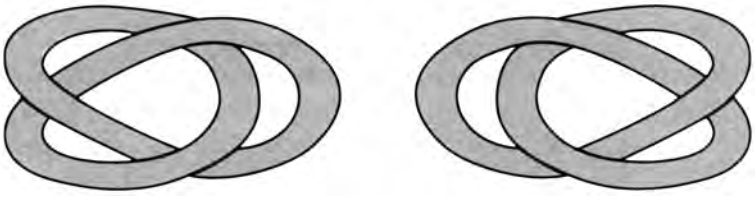


Figura 57

și mai precis. Noul polinom este acum cunoscut ca *polinomul HOMFLY*, după inițialele descoperitorilor – Hoste, Ocneanu, Millet, Freyd, Lickorish și Yetter. Mai mult, ca și cum patru grupuri trecând linia de sosire împreună nu ar fi de ajuns, doi matematicieni polonezi (Przytycki și Traczyck) au descoperit independent exact același polinom, dar nu l-au publicat la timp din pricina capriciilor poștei. În consecință, polinomul e numit și HOMFLYPT (sau uneori THOMFLYP), prin adăugarea inițialelor descoperitorilor polonezi.

Deși au fost descoperiți între timp și alți invarianți ai nodurilor, n-am ajuns încă la clasificarea completă a nodurilor. Întrebarea care anume nod poate fi răsucit și întors pentru a genera un alt nod, fără a folosi foarfeci, rămâne deocamdată fără răspuns. Invariantul cel mai avansat descoperit până în prezent îi aparține matematicianului francez de origine rusă Maxim Kontsevich, care a primit în 1998 prestigioasa Medalie Fields, iar în 2008 Premiul Crafford pentru cercetările sale. Tot în 1998, Jim Hosts de la Universitatea Pitzer din Clermont, California, și Jeffrey Weeks de la Canton, New York, au clasificat toate buclele înnodate cu cel mult șaisprezece încrucișări. O clasificare identică a fost realizată independent de Morwen Thistlewaite de la Universitatea din Tenessee, Knoxville. Fiecare listă conține exact 1 701 936 de noduri diferite!

Adevărata surpriză nu a venit însă de la rezultatele propriu-zise din teoria nodurilor, ci de la spectaculoasele și neașteptatele repercusiuni ale teoriei asupra unui spectru larg de discipline științifice.

Nodurile vieții

Să ne amintim că teoria nodurilor a fost stimulată de un model greșit al atomului. Odată mort modelul, matematicienii nu s-au simțit descurajați, ci au pornit într-o lungă și dificilă aventură în încercarea de a înțelege nodurile pentru ele însele. Închipuiți-vă bucuria care i-a cuprins când teoria nodurilor s-a dovedit brusc esențială pentru înțelegerea proceselor fundamentale care implică moleculele vieții. E nevoie de un mai bun exemplu privind rolul „pasiv" al matematicii pure în explicarea naturii?

Acidul dezoxiribonucleic, ADN, este materialul genetic al tuturor celulelor. El constă în două fâșii lungi care sunt împletite și răsucite una în jurul alteia de milioane de ori pentru a forma o dublă spirală. De-a lungul celor două coloane vertebrale care pot fi considerate cele două laturi ale unei scări, alternează molecule de zahăr și fosfat. „Fușteii" scării constau din perechi de baze prinse între ele prin legături de hidrogen într-un mod prestabilit (adenina se leagă numai de timină, iar citozina numai de guanină; figura 58). Atunci când o celulă se divide, primul pas este replicarea ADN-ului, astfel încât celulele-fiice să poată primi cópii. În mod asemănător, în procesul de *transcriere* (în care informația genetică a ADN-ului e copiată în ARN), o secțiune a dublei spirale a ADN-ului este desfășurată și numai una dintre șuvițele ADN-ului servește drept model. După ce se încheie sinteza ARN-ului, ADN-ul se înfășoară la loc în spirală. Nici procesul de replicare, nici cel de transcriere nu este totuși simplu, căci ADN-ul e atât de strâns înnodat și înfășurat (pentru a stoca informația cât mai compact), încât, dacă nu ar avea loc despachetarea, aceste procese esențiale pentru viață nu s-ar putea desfășura lin. În plus, pentru ca procesul de replicare să se încheie, moleculele-fiice de ADN trebuie deznodate, iar ADN-ul părinte trebuie să revină în cele din urmă la configurația inițială.

Agenții care se ocupă de deznodare și descâlcire sunt enzimele. Enzimele pot face să treacă o șuviță ADN prin alta creând rupturi temporare și legând din nou capetele într-un mod diferit.

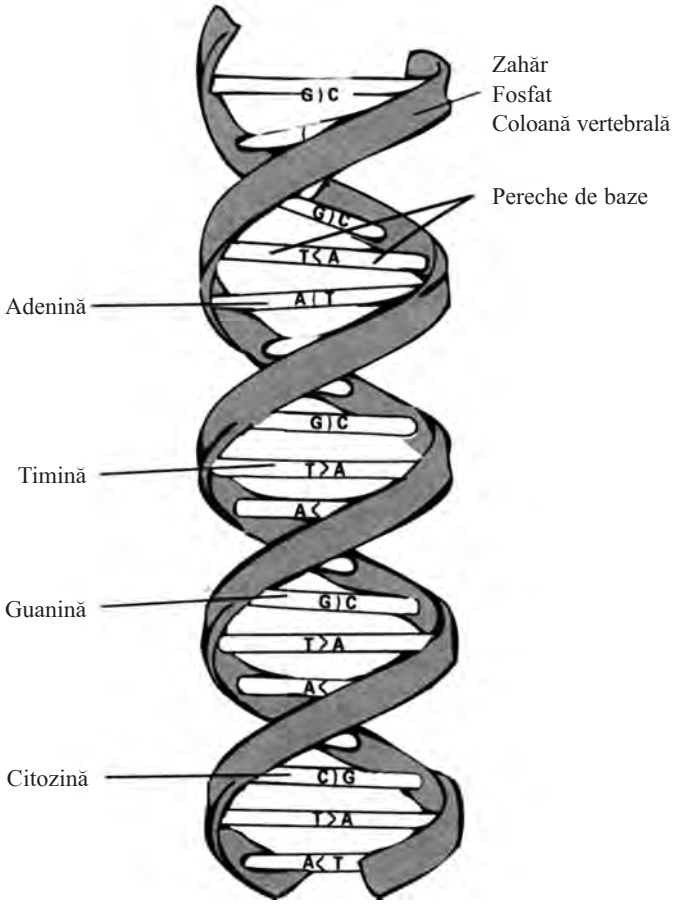


Figura 58

Vi se pare cunoscut acest procedeu? Sunt tocmai operațiile chirurgicale introduse de Conway pentru desfacerea nodurilor matematice (reprezentate în figura 56). Cu alte cuvinte, din punct de vedere topologic, ADN-ul este un nod complex care trebuie desfăcut de enzime pentru a permite replicarea și transcrierea. Folosind teoria nodurilor pentru a calcula cât este de greu de deznodat ADN-ul,

cercetătorii pot studia proprietățile enzimelor care efectuează operația. Folosind tehnici de vizualizare experimentale precum microscopia electronică și electroforeza, oamenii de știință pot acum observa și măsura schimbările în înnodarea și legarea ADN-ului provocate de o enzimă (figura 59 prezintă o micrografie electronică a unui nod ADN). Matematicienii trebuie să răspundă provocării de a deduce apoi mecanismele prin care enzimele operează, pornind de la schimbările observate în topologia ADN-ului. În plus, schimbarea numărului de încrucișări în nodul ADN oferă biologilor o măsură a *vitezelor de reacție* ale enzimelor – câte încrucișări pe minut pot fi afectate de o enzimă de concentrație dată.

Dar biologia moleculară nu e singurul domeniu în care teoria nodurilor și-a găsit aplicații neprevăzute. Teoria corzilor – actuala încercare de a formula o teorie unificată care să explice toate forțele din natură – este și ea preocupată de noduri.

Figura 59

Universul pe o coardă?

Gravitația este forța care acționează la scara cea mai mare. Ea menține laolaltă stelele în galaxii și influențează expansiunea universului. Relativitatea generală a lui Einstein este o remarcabilă teorie a gravitației. Adânc în nucleul atomic, domnesc alte forțe și o altă teorie. Forțele nucleare tari mențin laolaltă particule numite *cuarci* pentru a forma protonii și neutronii, constituenții elementari ai materiei. Comportamentul particulelor și forțelor din lumea subatomică e guvernat de legile mecanicii cuantice. Cuarcii și galaxiile ascultă oare de aceleași reguli? Fizicienii cred că da, însă nu știu încă de ce. Timp de zeci de ani, fizicienii au căutat o „teorie a tot ce există" – o descriere completă a legilor naturii. În particular, ei vor să umple golul dintre mare și mic printr-o teorie cuantică a gravitației – o reconciliere a relativității generale cu mecanica cuantică. Teoria corzilor pare a fi candidatul cel mai promițător pentru o asemenea teorie a tot ce există. Ea a apărut doar ca o teorie a forței nucleare, spre a fi apoi abandonată, dar a fost readusă la viață în 1974 de fizicienii John Schwarz și Joel Scherk. Ideea de bază a teoriei corzilor este destul de simplă. Ea spune că particulele elementare subatomice, cum sunt electronii și cuarcii, nu sunt entități punctiforme lipsite de structură, ci diferite moduri de vibrație ale aceleiași corzi fundamentale. Potrivit acestor idei, cosmosul e umplut cu bucle minuscule, elastice, ca niște benzi de cauciuc. La fel cum corzile unei viori produc diverse armonice când sunt ciupite, diferitele vibrații ale acestor corzi în formă de buclă corespund diferitelor particule de materie. Cu alte cuvinte, lumea este un fel de simfonie.

Cum corzile sunt bucle închise deplasându-se prin spațiu, pe măsură ce timpul trece, ele mătură suprafețe (numite *foi de univers*) de formă cilindrică (figura 60). Dacă o coardă emite alte corzi, acest cilindru se despică pentru a forma structuri în forma unei praștii. Când mai multe corzi interacționează, ele formează o rețea complexă de suprafețe toroidale unite. Pe când studiau aceste tipuri de structuri topologice complexe, specialiștii în teoria

Figura 60

corzilor Hirosi Ooguri și Cumrun Vafa au descoperit o legătură surprinzătoare între numărul suprafețelor toroidale, proprietățile geometrice intrinseci ale nodurilor și polinomul Jones. Încă înainte de asta, Ed Witten – unul dintre protagoniștii teoriei corzilor – a găsit o relație neașteptată între polinomul Jones și însăși temelia teoriei corzilor (*teoria cuantică a câmpului*). Modelul lui Witten a fost apoi regândit din perspectivă pur matematică de Michael Atiyah. Astfel, teoria corzilor și teoria nodurilor trăiesc în perfectă simbioză. Pe de o parte, teoria corzilor a beneficiat de rezultatele din teoria nodurilor; pe de alta, teoria corzilor a condus la o noi descoperiri în teoria nodurilor.

Având o deschidere mult mai largă, teoria corzilor caută explicații pentru constituenții elementari ai materiei cam la fel cum căutase la început Thomson o teorie a atomilor. Thomson crezuse (greșit) că nodurile puteau oferi răspunsul. Printr-o întorsătură surprinzătoare, teoreticienii corzilor cred că nodurile pot într-adevăr oferi măcar câteva dintre răspunsuri.

Povestea teoriei nodurilor demonstrează minunat neașteptata forță a matematicii. După cum am arătat mai sus, chiar și latura „activă“ a eficacității matematicii de una singură – în care oamenii de știință creează matematica necesară pentru a descrie știința observabilă – oferă surprize uimitoare când vine vorba de precizie. Îngăduiți-mi să prezint pe scurt un subiect din fizică în care au

jucat un rol deopotrivă aspectele active și cele pasive, dar care e remarcabil mai cu seamă datorită preciziei obținute.

O precizie decisivă

Newton a luat legile căderii corpurilor descoperite de Galilei și de alți experimentatori italieni, le-a combinat cu legile mișcării planetelor determinate de Kepler, și a folosit această schemă unificată pentru a elabora o lege matematică universală a gravitației. Pe drum, Newton a trebuit să elaboreze o întreagă nouă ramură a matematicii – calculul infinitezimal –, care i-a permis să formuleze concis și coerent toate proprietățile legilor pe care le propunea pentru mișcare și gravitație. Precizia cu care Newton și-a putut verifica legea gravitației, date fiind rezultatele experimentale și de observație din vremea sa, nu a fost mai bună de aproximativ 4 la sută. Cu toate acestea, precizia cu care funcționa legea a întrecut orice așteptări. În anii 1950, precizia experimentală era mai bună de unu la zece mii. Dar asta nu e tot. Câteva teorii speculative recente și-au propus să explice faptul că expansiunea universului nostru pare să se accelereze, sugerând că gravitația își poate schimba comportamentul la scara distanțelor foarte mici. Să ne amintim că legile lui Newton afirmă că atracția gravitațională scade cu inversul pătratului distanței. Prin urmare, dacă dublăm distanța dintre două mase, forța gravitațională pe care o resimte fiecare masă devine de patru ori mai slabă. Noile scenarii preziceau abateri de la acest comportament pe distanțe mai mici de un milimetru. Eric Adelberger, Daniel Kapner și colaboratorii lor de la Universitatea din Washington, Seattle, au efectuat o serie de experimente ingenioase pentru a testa schimbarea prezisă a dependenței în raport cu distanța. Rezultatele lor cele mai recente, publicate în ianuarie 2007, arată că legea proporționalității cu inversul pătratului distanței se verifică până la o distanță egală cu cincizeci și șase de miimi de milimetru! Astfel, o lege matematică propusă cu mai bine de trei sute de ani în urmă, pe baza unor

observații foarte sărace, nu numai că s-a dovedit extrem de precisă, dar s-a demonstrat că e valabilă într-un domeniu de distanțe care nu a putut fi testat până de curând.

Există o întrebare importantă la care Newton nu a răspuns: cum funcționează gravitația? Cum afectează Pământul mișcarea Lunii, de la o distanță de un sfert de milion de mile? Newton era conștient de acest neajuns al teoriei sale, pe care l-a recunoscut deschis în *Principia*:

> Am explicat până acum fenomenele cereşti şi pe cele ale oceanului* nostru prin forța gravitației, dar încă nu am stabilit cauza acestei forțe. Este cert că ea trebuie să-şi aibă originea într-o cauză care pătrunde în chiar centrul Soarelui și planetelor […] și se propagă în toate direcțiile pe distanțe uriaşe, scăzând întotdeauna cu inversul pătratului distanțelor […]. Dar nu am putut deocamdată descoperi cauza acestor proprietăți ale gravitației pornind de la fenomene, și nu avansez nici o ipoteză.

Cel care s-a hotărât să răspundă provocării generate de omisiunea lui Newton a fost Albert Einstein (1879–1955). În 1907 Einstein avea un motiv foarte puternic să se oprească asupra gravitației – noua sa teorie a *relativității restrânse* părea să intre în contradicție cu legea newtoniană a gravitației.

Newton credea că acțiunea gravitației e instantanee. El a presupus că planetele resimțeau imediat forța gravitațională a Soarelui, iar mărul resimțea imediat atracția Pământului. Pe de altă parte, relativitatea restrânsă a lui Einstein se baza pe afirmația că nici un obiect, energie sau informație nu puteau călători mai repede decât lumina. Cum putea fi atunci gravitația instantanee? După cum vom vedea în exemplul următor, consecințele acestei contradicții puteau fi dezastruoase pentru noțiuni fundamentale cum e percepția noastră asupra cauzei şi efectului.

---

* Este vorba de maree. (*N. t.*)

Să ne închipuim că, brusc, Soarele ar dispărea. Lipsit de forța care-l menține pe orbită, Pământul (potrivit lui Newton) ar începe imediat să se miște în linie dreaptă (făcând abstracție de micile abateri provocate de gravitația celorlalte planete). Soarele însă ar dispărea din câmpul vizual al pământenilor abia cu opt minute mai târziu, intervalul în care lumina parcurge distanța de la Soare la Pământ. Cu alte cuvinte, schimbarea în mișcarea Pământului ar preceda dispariția Soarelui.

Pentru a înlătura această contradicție și, în același timp, pentru a aborda problema nerezolvată a lui Newton, Einstein a pornit în căutarea aproape obsesivă a unei noi teorii a gravitației. Sarcina era colosală: o nouă teorie trebuia nu numai să păstreze toate succesele remarcabile ale teoriei lui Newton, dar și să explice cum funcționează gravitația, și s-o facă într-un mod compatibil cu relativitatea restrânsă. După câteva starturi ratate și rătăciri pe căi greșite, Einstein și-a atins scopul în 1915. *Teoria generală a relativității* este privită și azi de mulți drept una dintre cele mai frumoase teorii formulate vreodată.

În centrul descoperirii lui Einstein se află ideea că gravitația nu e decât o deformare a structurii spațiului și timpului. Potrivit lui Einstein, la fel cum o minge de golf este ghidată de deformările și curbele unui gazon sinuos, planetele urmează traiectorii curbe într-un spațiu deformat care reprezintă gravitația Soarelui. Cu alte cuvinte, în absența materiei sau a altor forme de energie, *spațiul-timp* (unificarea celor trei dimensiuni spațiale cu timpul) ar fi plat. Materia și energia deformează spațiul-timp, așa cum o bilă grea de popice provoacă o adâncitură într-o foaie elastică. Planetele urmează cele mai directe traiectorii în această geometrie curbă, care este o manifestare a gravitației. Descoperind „cum funcționează“ gravitația, Einstein a oferit și cadrul pentru a răspunde la întrebarea cât de repede se propagă ea. Aceasta se reducea la a afla cât de repede se pot propaga deformările spațiului-timp, ceea ce seamănă cu a calcula viteza undelor de pe suprafața unui lac. Einstein a arătat că, în relativitatea generală, gravitația călătorește exact cu viteza luminii, ceea ce elimina contradicția dintre teoria

lui Newton și relativitatea restrânsă. Dacă Soarele ar dispărea, schimbarea în orbita Pământului s-ar produce opt minute mai târziu, coincizând cu momentul în care noi i-am observa dispariția.

Faptul că Einstein a pus spațiul-timp cvadridimensional curbat la baza noii sale teorii privind cosmosul îl făcea să aibă nevoie de o teorie matematică a acestor entități geometrice. Disperat, el s-a adresat fostului său coleg de clasă Marcel Grossmann (1878–1936): „Am căpătat un mare respect față de matematică, ale cărei subtilități le consideram înainte doar o extravaganță.“ Grossmann i-a arătat că geometria neeuclidiană a lui Riemann (prezentată în capitolul 6) era tocmai instrumentul de care avea Einstein nevoie – o geometrie a spațiilor curbe în oricâte dimensiuni. Era o formidabilă demonstrație a ceea ce am numit eficacitatea „pasivă“ a matematicii, pe care Einstein a recunoscut-o imediat: „Putem de fapt privi [geometria] ca pe cea mai veche ramură a fizicii“, spunea el. „Fără ea n-aș fi putut formula teoria relativității.“

Relativitatea generală a fost și ea testată cu o precizie impresionantă. Aceste teste nu sunt ușor de găsit, deoarece curbura spațiului-timp introdusă de obiecte precum Soarele se măsoară abia în părți pe milion. Dacă inițial toate testele erau legate de observații din interiorul sistemului solar (de exemplu, mici modificări ale orbitei planetei Mercur, comparate cu predicțiile gravitației newtoniene), acum au devenit posibile teste mai exotice. Unul dintre cele mai precise folosește un obiect astronomic numit *pulsar dublu*.

Pulsarul e o stea extrem de compactă care emite unde radio, având o masă ceva mai mare decât masa Soarelui, dar cu o rază de numai aproximativ 10 km. Densitatea unei asemenea stele (numită *stea neutronică*) este atât de mare, încât un centimetru cub de materie cântărește aproape un miliard de tone. Multe dintre aceste stele neutronice se rotesc foarte repede în timp ce emit unde radio prin polii lor magnetici. Când axa magnetică e înclinată față de axa de rotație (ca în figura 61), fasciculul de unde radio de la unul din polii magnetici poate intersecta direcția pe care vizăm steaua numai o dată la fiecare rotație, ca licărirea unui far. În acest

caz, emisia de unde radio va părea că pulsează – de unde numele de „pulsar“. Se poate întâmpla ca doi pulsari să se rotească pe o orbită închisă în jurul centrului comun de gravitație, creând un sistem de pulsar dublu.

Există două proprietăți care fac ca acest pulsar dublu să fie un excelent laborator pentru testarea relativității generale: (1) Pulsarii radio sunt ceasornice minunate – perioadele lor de rotație sunt atât de stabile, încât depășesc în precizie orologiile atomice, și (2) Pulsarii sunt atât de compacți, încât câmpurile lor gravitaționale extrem de intense produc efecte relativiste importante. Aceste caracteristici le permit astronomilor să măsoare foarte precis schimbările în timpul de propagare a luminii de la pulsari la Pământ, provocate de mișcarea orbitală a celor doi pulsari.

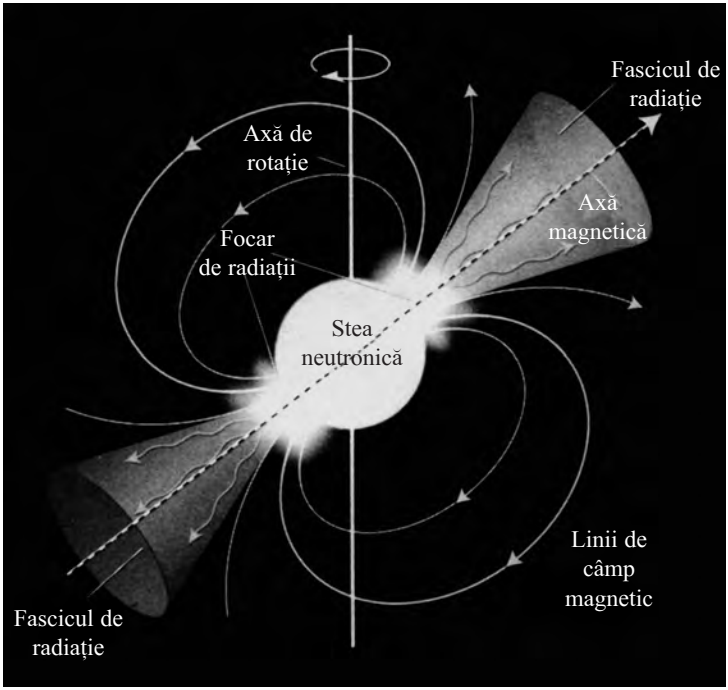


Figura 61

Cel mai recent test a fost rezultatul unor măsurători de mare precizie efectuate de-a lungul a doi ani și jumătate asupra sistemului de pulsar dublu PSR J0737-3039A/B (lungul „număr de telefon“ reflectă coordonatele sistemului pe cer). Cei doi pulsari din acest sistem efectuează o revoluție orbitală completă în numai două ore și douăzeci și șapte de minute, iar sistemul se află la două mii de ani-lumină de Pământ (un an-lumină este distanța pe care o parcurge lumina în vid în timp de un an, și reprezintă aproximativ zece bilioane de kilometri). O echipă de astronomi condusă de Michael Kramer de la Universitatea din Manchester a măsurat corecțiile relativiste la mișcarea newtoniană. Rezultatele, publicate în octombrie 2006, au fost în acord cu valorile prevăzute de relativitatea generală, în limita unei erori de 0,05 la sută!

În paranteză fie spus, atât relativitatea restrânsă, cât și cea generală joacă un rol important în Sistemul de Poziționare Global (GPS) care ne ajută să găsim poziția noastră pe suprafața Pământului și drumul de la un loc la altul, fie că ne deplasăm cu mașina, cu avionul sau pe jos. GPS-ul determină poziția curentă a receptorului prin măsurarea timpului în care semnalul emis de mai mulți sateliți ajunge la el și prin triangulare, pe baza pozițiilor cunoscute ale fiecărui satelit. Relativitatea specială prezice că orologiile atomice de la bordul sateliților ar trebui să ticăie mai încet (rămânând în urmă cu câteva milionimi de secundă pe zi) decât cele de la sol, din cauza mișcării lor relative. În același timp, relativitatea generală prezice că orologiile sateliților ar trebui să ticăie mai rapid (cu câteva zecimi de milionimi de secundă pe zi) decât cele de la sol, din cauza faptului că deasupra Pământului curbura în spațiul-timp provocată de masa Pământului e mai mică. Fără a efectua corecțiile necesare corespunzând acestor două efecte, erorile în poziționarea globală s-ar acumula într-un ritm de peste opt kilometri pe zi.

Teoria gravitației este doar unul dintre numeroasele exemple care ilustrează miraculoasa potrivire și uimitoarea precizie a formulării matematice a legilor naturii. În acest caz, și în atâtea altele, ce obținem din ecuații e mult mai mult decât am introdus la

început în ele. S-a dovedit că precizia teoriilor lui Newton și Einstein era incomparabil mai mare decât precizia observațiilor pe care teoriile încercau să le explice inițial.

Poate că cel mai bun exemplu de precizie uimitoare la care poate ajunge o teorie matematică e dat de *electrodinamica cuantică* (QED), teoria care descrie toate fenomenele ce implică particulele încărcate și lumina. În 2006, un grup de fizicieni de la Universitatea Harvard a determinat momentul magnetic al electronului (care măsoară tăria interacției dintre electron și un câmp magnetic) cu o precizie de opt părți la un bilion. Aceasta e în sine o performanță experimentală formidabilă, dar, dacă ne gândim că cele mai recente calcule teoretice bazate pe QED ating o precizie asemănătoare, iar cele două rezultate sunt în acord, precizia devine aproape neverosimilă. Când a aflat de succesele repetate ale QED, Freeman Dyson, unul dintre părinții acesteia, a spus: „Sunt uluit cât de precis dansează Natura după melodia pe care am mâzgălit-o noi atât de neglijent acum cincizeci și șapte de ani, iar experimentatorii și teoreticienii pot măsura și calcula dansul ei până la o parte dintr-un bilion."

Precizia nu e însă singurul atu al teoriilor matematice – un altul e puterea de predicție. Îngăduiți-mi să dau doar două exemple simple, unul din secolul XIX, celălalt din secolul XX, care demonstrează această forță. Prima teorie prezicea un nou fenomen, a doua – existența unui nou tip de particule.

James Clark Maxwell, părintele teoriei clasice a electromagnetismului, a arătat în 1864 că un câmp variabil, electric sau magnetic, ar trebui conform teoriei să genereze unde care se propagă. Aceste unde – undele electromagnetice binecunoscute, de pildă undele radio – au fost detectate pentru prima dată de fizicianul german Heinrich Hertz (1857–1894) într-o serie de experimente efectuate la sfârșitul anilor 1880.

La sfârșitul anilor 1960, fizicienii Steven Weinberg, Sheldon Glashow și Abdus Salam au elaborat o teorie care tratează unitar forța electromagnetică și forța nucleară slabă. Această teorie, numită acum teoria electroslabă, prezicea existența a trei particule

(bosonii W^+, W^- și Z) care nu fuseseră niciodată observate. Particulele au fost detectate fără nici o urmă de îndoială în 1983, în experimente efectuate într-un accelerator (în care se ciocnesc particule subatomice la energii foarte înalte) de fizicienii Carlo Rubbia și Simon van der Meer.

Fizicianul Eugen Wigner, căruia îi aparține expresia „imprevizibila eficacitate a matematicii", propunea să numim toate aceste realizări neașteptate ale teoriilor matematice „legea empirică a epistemologiei" (epistemologia fiind disciplina care studiază sursele și limitele cunoașterii). Dacă această „lege" n-ar fi valabilă, susținea el, oamenilor de știință le-ar lipsi stimulentul și încrederea absolut necesare în cercetarea legilor naturii. Wigner nu a dat însă nici o explicație pentru legea empirică a epistemologiei, ci a privit-o ca pe un „dar minunat" pentru care trebuie să fim recunoscători, chiar dacă nu-i înțelegem sursa. Pentru Wigner, acest „dar" surprindea esența întrebării privind imprevizibila eficacitate a matematicii.

Ajunși aici, cred că am strâns suficiente indicii pentru a încerca măcar să răspundem la întrebările cu care am început: de ce e matematica atât de eficientă și de rodnică în explicarea lumii, încât aduce chiar și un spor de cunoaștere? Și, în fond, matematica e inventată sau descoperită?

Capitolul 9

Despre mintea umană, matematică și univers

Cele două întrebări: (1) Are matematica o existență independentă de cea a minții umane? și (2) De ce pot fi aplicate conceptele matematice mult dincolo de contextul în care au fost inițial elaborate? sunt legate în mod subtil. Pentru a simplifica discuția, voi încerca totuși să le abordez pe rând.

Vă puteți, desigur, întreba dacă matematicienii contemporani cred că matematica e descoperire sau invenție. Iată ce spun Philip Davis și Reuben Hersh în minunata lor carte *Experiența matematică*:

> Majoritatea celor care au abordat această temă par să fie de acord că matematicianul profesionist tipic este platonician [crede că matematica e descoperire] în timpul săptămânii și formalist [crede că matematica e invenție] duminica. Adică atunci când se ocupă cu matematica e convins că are de-a face cu o realitate obiectivă ale cărei proprietăți încearcă să le determine. Dar apoi, somat să explice filozofic această realitate, îi este mai ușor să pretindă că, la urma urmei, nu crede în ea.

În afară de tentația de a înlocui „el“ prin „el sau ea“ peste tot, pentru a reflecta demografia schimbătoare din matematică, am impresia că această caracterizare continuă să fie valabilă pentru mulți matematicieni și fizicieni teoreticieni de azi. Totuși, unii matematicieni din secolul XX au luat poziție fermă de o parte sau de alta.

Iată, reprezentând punctul de vedere platonician, opinia lui G.H. Hardy din *Apologia unui matematician*:

> Pentru mine, și presupun că pentru majoritatea matematicienilor, există o altă realitate, pe care o voi numi „realitate matematică“, dar nici matematicienii și nici filozofii nu pot cădea de acord asupra naturii acestei realități matematice. Unii cred că e „mentală“ și că într-un anume sens noi o construim, alții că e în afara noastră și independentă de noi. Ca să explici convingător realitatea matematică ar trebui să fi rezolvat deja foarte multe dintre cele mai dificile probleme ale metafizicii. Dacă ai putea include și realitatea fizică în această explicație, înseamnă că le-ai rezolvat pe toate.
>
> N-ar trebui să discut aceste probleme aici, chiar dacă am căderea s-o fac, totuși am să-mi exprim dogmatic punctul de vedere, pentru a evita neînțelegeri minore. Cred că realitatea matematică se află în afara noastră, că rostul nostru este s-o descoperim și s-o *observăm*, iar teoremele pe care le demonstrăm și pe care le prezentăm grandiloc-vent drept „creațiile“ noastre sunt pur și simplu notele pe care le luăm după observațiile noastre. Această perspectivă a fost susținută, sub o formă sau alta, de mulți filozofi celebri de la Platon încoace, iar eu voi folosi limbajul firesc pentru un om care o împărtășește.

Matematicienii Edward Kasner (1878–1955) și James Newman (1907–1966) susțin exact părerea opusă, în *Matematică și imaginație*:

> Nu e surprinzător că matematica se bucură de un prestigiu neegalat de vreun alt elan al gândirii orientate spre o țintă. Ea a făcut cu putință atâtea progrese în știință, e indispensabilă în domeniul practic, și în același timp e capodopera purei abstracțiuni, încât recunoașterea superiorității sale printre realizările intelectuale umane e cât se poate de firească.

> În pofida superiorității sale, prima prețuire reală a matematicii a avut loc abia recent, cu ocazia apariției geometriei neeuclidiene în patru dimensiuni. Nu vrem să spunem prin asta că progresele făcute de calculul infinitezimal, teoria probabilităților, aritmetica infinitului, topologia și alte subiecte despre care am vorbit trebuie minimalizate. Fiecare a lărgit matematica și a adâncit semnificația ei și a înțelegerii universului fizic. Și totuși, nici unul nu a contribuit la introspecția matematică, la cunoașterea relațiilor părților matematicii între ele și cu întregul, în aceeași măsură ca ereziile neeuclidiene.
>
> Ca rezultat al spiritului critic curajos adus de aceste erezii, am depășit ideea că adevărurile matematice au o existență independentă și aparte față de mintea noastră. E chiar ciudat că o asemenea idee a putut exista vreodată. Și totuși, asta credeau Pitagora și Descartes, împreună cu sute de alți mari matematicieni, înainte de secolul XIX. Astăzi matematica s-a dezlegat, și-a azvârlit lanțurile. Oricare i-ar fi esența, ne dăm seama că e la fel de liberă ca spiritul, la fel de neînfrânată ca imaginația. Geometria neeuclidiană este dovada că matematica, spre deosebire de muzica sferelor, e creată de mâna omului, supusă doar limitărilor impuse de legile gândirii.

Astfel, contrar preciziei și certitudinii specifice matematicii, avem de-a face aici cu o diversitate de opinii caracteristică mai curând dezbaterilor filozofice sau politice. Ar trebui oare să fim surprinși? Nu tocmai. Întrebarea dacă matematica e inventată sau descoperită nu e, de fapt, o problemă de matematică.

Ideea de „descoperire“ implică preexistența într-un anumit univers, fie el real sau metafizic. Noțiunea de „invenție“ implică mintea omenească, fie în chip individual, fie în chip colectiv. Problema ține deci de o combinație de discipline care pot implica fizica, filozofia, matematica, științele cognitive, chiar și antropologia, dar cu certitudine nu ține exclusiv de matematică. Prin urmare, poate că matematicienii nici măcar nu sunt cei mai în măsură să

răspundă la această întrebare. La urma urmelor, poeții care pot face minuni cu limbajul nu sunt neapărat cei mai buni lingviști, iar cei mai mari filozofi nu sunt în general experți în funcționarea creierului. Răspunsul la întrebarea „inventată sau descoperită“ ar putea fi găsit doar cercetând cu atenție numeroase indicii provenind dintr-o gamă largă de domenii.

Metafizica, fizica și cunoașterea

Cei care cred că matematica există într-un univers independent de noi se împart în două tabere atunci când se pune problema naturii acestui univers; „adevărații“ platonicieni, pentru care matematica sălășluiește în lumea abstractă și eternă a formelor matematice, și aceia pentru care structurile matematice constituie de fapt o parte reală a lumii naturale. Am vorbit deja despre platonismul pur și despre unele dintre neajunsurile sale filozofice, așa încât dați-mi voie să mă opresc asupra celei de-a doua perspective.

Cel care a adoptat versiunea extremă și radical speculativă a scenariului „matematica – parte a lumii fizice“ este Max Tegmark, un coleg astrofizician de la Institutul Tehnologic din Massachusetts.

Tegmark susține că „universul nostru nu e doar descris de matematică – el *este* matematică“ [s. m.]. Raționamentul său pornește de la presupunerea greu de contrazis că există o realitate fizică externă independentă de oameni. El trece apoi la examinarea naturii a ceea ce ar putea fi teoria ultimă a unei asemenea realități (numită de fizicieni „teoria a tot ce există“). Cum lumea fizică este complet independentă de oameni, spune Tegmark, descrierea ei trebuie să fie complet eliberată de orice „bagaj“ uman (de pildă, limbajul). Cu alte cuvinte, teoria ultimă nu poate conține noțiuni de tipul „particule subatomice“, „corzi vibrante“, „spațiu-timp curbat“ sau alte constructe create de oameni. De aici, Tegmark trage concluzia că singura descriere posibilă a cosmosului este una care implică doar noțiuni abstracte și relațiile dintre ele – ceea ce reprezintă pentru el tocmai definiția matematicii.

Argumentul lui Tegmark în favoarea unei realități matematice e fără îndoială interesant și, dacă ar fi valabil, ne-ar apropia mult de lămurirea problemei „eficacității imprevizibile a matematicii". Într-un univers *identificat* drept matematică, faptul că matematica se potrivește naturii ca o mănușă nu e în nici un caz o surpriză. Din păcate, raționamentul lui Tegmark nu mi se pare foarte convingător. Saltul de la existența unei realități externe (independentă de oameni) la concluzia că „trebuie să credem în ceea ce eu numesc ipoteza universului matematic: aceea că realitatea noastră fizică e o structură matematică" implică, după părerea mea, o scamatorie. Când Tegmark încearcă să definească matematica, el spune: „Pentru un logician modern, o structură matematică este exact asta: un set de entități abstracte și relațiile dintre ele." Dar acest logician modern este un om! Cu alte cuvinte, Tegmark nu *demonstrează* niciodată cu adevărat că matematica nu e inventată de oameni, ci doar presupune acest lucru. Mai mult, după cum remarca neurobiologul francez Jean-Pierre Changeux ca răspuns la o afirmație asemănătoare: „Cred că a pretinde că obiectele matematice au realitate fizică, la nivelul fenomenelor naturale pe care le studiem în biologie, pune o dificilă problemă epistemologică. Cum poate o stare fizică, dinăuntrul creierului, să reprezinte o altă stare fizică din afara sa?"

Majoritatea celorlalte încercări de a plasa obiectele matematice direct în realitatea fizică exterioară se bazează pur și simplu pe dovada eficacității matematicii în explicarea naturii. Aceasta presupune însă că nu e posibilă nici o altă explicație pentru eficacitatea matematicii, ceea ce, după cum vom vedea, nu este adevărat.

Dacă matematica nu sălășluiește nici în lumea platoniciană atemporală și aspațială, nici în lumea fizică, înseamnă oare că matematica e în întregime inventată de oameni? Nicidecum. De fapt, voi arăta în următoarea secțiune că cea mai mare parte a matematicii constă în descoperiri. Înainte de a merge mai departe, ar fi însă util să examinăm câteva opinii ale specialiștilor contemporani în științele cognitive. Motivul e simplu – chiar dacă matematica

ar fi în întregime descoperită, aceste descoperiri sunt făcute totuși de oameni (matematicieni) care își folosesc creierele.

Odată cu imensul progres în științele cognitive din ultimii ani, era firesc să ne așteptăm ca neurobiologii și psihologii să-și îndrepte atenția spre matematică, în particular spre cercetarea bazelor matematicii în cogniția umană. O privire rapidă asupra concluziilor majorității specialiștilor în științele cognitive ne aduce în minte un aforism al lui Mark Twain: „Pentru un om cu un ciocan, totul arată ca un cui.“ Cu mici diferențe de accent, toți neurobiologii și psihologii consideră matematica o invenție omenească. La o cercetare mai atentă vom descoperi însă că, deși interpretarea datelor cognitive e departe de a fi ferită de ambiguități, nu încape îndoială că eforturile cognitive reprezintă o etapă nouă și inovatoare în căutarea fundamentelor matematicii. Iată câteva observații făcute de cognitiviști.

În cartea sa din 1997 *Simțul numerelor*, Stanislas Dehaene, specializat în cogniția numerică, conchide că „intuiția privind numerele este adânc înrădăcinată în creierele noastre“. Această perspectivă se apropie de cea a intuiționiștilor care au vrut să întemeieze întreaga matematică pe forma pură a intuiției numerelor naturale. Dehaene susține că descoperirile legate de psihologia aritmeticii confirmă că „numărul face parte dintre «obiectele naturale ale gândirii», categoriile înnăscute pe baza cărora percepem lumea“. După un alt studiu efectuat asupra unui grup izolat de indigeni din Amazonia, Mundurukù, Dehaene și colaboratorii săi au revenit în 2006 cu o judecată asemănătoare privind geometria: „Înțelegerea spontană a conceptelor și reprezentărilor geometrice de către această comunitate izolată dovedește că, la fel ca aritmetica elementară, nucleul cunoașterii geometrice e o componentă universală a minții umane.“ Nu toți cognitiviștii sunt de acord cu aceste concluzii. Unii arată, de pildă, că reușita membrilor grupului Mundurukú în recentul studiu geometric, în care au trebuit să identifice o curbă printre linii drepte, un dreptunghi printre pătrate, o elipsă printre cercuri etc., se poate explica mai curând

prin capacitatea lor vizuală de a discerne o formă diferită, decât printr-o cunoaştere geometrică înnăscută.

Jean-Pierre Changeux, neurobiolog francez angajat într-un fascinant dialog despre natura matematicii cu matematicianul (de „convingere“ platoniciană) Alain Connes în *Conversații despre minte, materie și matematică**, face următoarea observație:

> Motivul pentru care obiectele matematice nu au nimic de-a face cu lumea simțurilor se leagă […] de caracterul lor generator, de capacitatea lor de a da naştere altor obiecte. Ideea care trebuie subliniată aici este că există în creier ceva ce poate fi numit „compartiment conştient“, un fel de spațiu fizic pentru simularea şi crearea de noi obiecte. […] În anumite privințe, aceste obiecte matematice noi sunt ca ființele vii: aidoma lor, ele sunt obiecte fizice care pot evolua rapid; spre deosebire de ființele vii, cu excepția virușilor, ele evoluează în creierul nostru.

În fine, cea mai categorică opinie în dilema invenție–descoperire e formulată de lingvistul cognitivist George Lakoff şi de psihologul Rafael Núñez în oarecum controversata lor carte *De unde provine matematica*. După cum am arătat deja în capitolul 1, aceştia afirmă:

> Matematica este o parte naturală a ființei umane. Ea apare din trupurile, creierele şi experiențele noastre zilnice în lumea înconjurătoare. [Lakoff şi Núñez spun deci că matematica se naşte dintr-o „minte întrupată“.] […] Matematica e un sistem de concepte umane care folosesc din plin instrumentele obişnuite ale cogniției umane […]. Oamenii au fost răspunzători pentru crearea matematicii şi rămânem răspunzători pentru păstrarea şi extinderea ei. Portretul matematicii are chip uman.

---

* Mario Livio citează traducerea în engleză (*Conversations on Mind, Matter, and Mathematics*) a cărții, apărută inițial în Franța, *Matière à pensée*. (*N. t.*)

Cognitiviștii își întemeiază concluziile pe ceea ce consideră ei a fi un ansamblu de dovezi convingătoare rezultând din numeroase experimente. Unele dintre aceste teste implică studii de imagistică funcțională a creierului în timpul efectuării unor sarcini matematice. Altele examinează competența matematică a bebelușilor, a grupurilor de vânători-culegători neinstruiți, de tipul Mundurukú, și a persoanelor cu diverse grade de vătămare a creierului. Majoritatea cercetătorilor sunt de acord că anumite capacități matematice par să fie înnăscute. De pildă, toți oamenii pot spune dintr-o ochire dacă au în față unul, două sau trei obiecte (capacitate numită *subitizare*)*. O versiune foarte simplificată a aritmeticii – sub forma grupării, împerecherii, a unor adunări și scăderi extrem de simple – poate fi și ea înnăscută, așa cum poate fi și o înțelegere elementară a noțiunilor din geometrie (deși această afirmație e mai controversată). Neurologii au identificat de asemenea regiuni ale creierului, precum girusul unghiular din emisfera stângă, care par să fie esențiale pentru jonglarea cu numerele și calculele matematice, dar nu și pentru limbaj și memoria de lucru.

Potrivit lui Lakoff și Núñez, un important instrument pentru a trece dincolo de aceste capacități înnăscute este construcția *metaforelor conceptuale* – procese ale gândirii care traduc concepte abstracte în unele mai concrete. De exemplu, înțelegerea aritmeticii se întemeiază pe metafora cât se poate de simplă a colecției de obiecte. Pe de altă parte, mai abstracta algebră booleană a mulțimilor se leagă metaforic de mulțimile de numere. Scenariul complex elaborat de Lakoff și Núñez oferă perspective interesante asupra motivelor pentru care oamenii găsesc unele concepte matematice mult mai dificile decât altele. Alți cercetători, între care neurologul Rosemary Varley de la Universitatea din Sheffield, cred că cel puțin unele dintre structurile matematice parazitează facultatea limbajului – perspicacitatea matematică se dezvoltă împrumutând instrumente folosite la construirea limbajului.

---

* Termenul englezesc *subitizing*, creat de psihologi, desemnează capacitatea instantanee (subită) de a vedea câte obiecte sunt într-un grup puțin numeros. (*N. t.*)

Contrar platonicienilor, cognitiviștii cred cu tărie în asocierea matematicii noastre cu mintea umană. Totuși, argumentul care mi se pare cel mai puternic împotriva platonismului nu a fost adus de neurobiologi, ci de Sir Michael Atiyah, unul dintre marii matematicieni ai secolului XX. În capitolul 1 am menționat pe scurt ideile sale, acum e momentul să le prezint mai în detaliu.

Dacă ar trebui să alegeți un concept din matematica noastră care să aibă cea mai mare probabilitate să existe independent de mintea umană, pe care l-ați alege? Cei mai mulți ar alege pesemne numerele naturale. Ce poate fi mai „natural“ decât 1, 2, 3… ? Până și Leopold Kronecker (1823–1891), matematicianul german cu înclinații intuiționiste, a făcut celebra afirmație: „Dumnezeu a creat numerele naturale, tot restul e opera omului.“ Astfel, dacă s-ar putea dovedi că și conceptul de număr natural își are obârșia în mintea umană, am avea un argument puternic în favoarea paradigmei „invenției“. Să ne întoarcem la Atiyah: „Dar să ne închipuim că inteligența ar aparține nu rasei umane, ci unei uriașe meduze solitare și izolate din adâncurile Oceanului Pacific. Ea nu ar avea experiența obiectelor individuale, ci doar a apei înconjurătoare. Mișcarea, temperatura și presiunea i-ar furniza datele senzoriale de bază. Într-un asemenea continuu pur, lumea discretă nu s-ar ivi și nu ar fi nimic de numărat.“ Cu alte cuvinte, Atiyah e convins că până și un concept elementar cum e cel de număr natural a fost *creat* de om, prin abstractizarea (cognitiviștii ar spune „prin metafore întemeietoare“) elementelor din lumea fizică. Altfel spus, numărul 12, de pildă, reprezintă o abstractizare a proprietății comune a tuturor lucrurilor care apar în duzini, la fel cum cuvântul „gânduri“ reprezintă o diversitate de procese care se petrec în creierul nostru.

Cititorul ar putea obiecta la folosirea universului ipotetic al meduzei în demonstrarea acestei idei. El ar putea spune că nu există decât un singur univers, inevitabil, și că fiecare presupunere trebuie cercetată în contextul acestui univers. Și totuși, asta ar reveni la a accepta că, de fapt, conceptul de număr natural depinde cumva de universul experienței umane! Remarcați că este exact

ceea ce Lagoff și Núñez voiau să spună când vorbeau despre matematica „întrupată“.

Conceptele matematicii pe care o cunoaștem își au prin urmare obârșia în mintea umană. Vă puteți întreba atunci de ce am insistat mai devreme că cea mai mare parte a matematicii este de fapt descoperită, perspectivă apropiată de cea a platonicienilor.

Invenție și descoperire

În limbajul de zi cu zi, distincția dintre descoperire și invenție are uneori limpezimea cristalului, alteori e ceva mai vagă. Nimeni n-ar spune că Shakespeare l-a descoperit pe Hamlet sau că Madame Curie a inventat radiumul. În același timp, noi medicamente pentru anumite tipuri de boli sunt de obicei anunțate ca descoperiri, chiar dacă presupun adesea sinteza meticuloasă a unor noi compuși chimici. Aș vrea să prezint mai amănunțit un exemplu concret din matematică, pentru a lămuri distincția dintre descoperire și invenție, dar și pentru a vedea mai bine procesele prin care matematica evoluează și progresează.

În cartea VI a *Elementelor* lui Euclid, găsim definiția pentru o anumită împărțire a unei drepte în două părți inegale (o altă definiție, în termeni de suprafețe, apare în cartea a II-a). Potrivit lui Euclid, dacă o dreaptă *AB* e împărțită de un punct *C* (figura 62) astfel încât raportul dintre lungimile celor două segmente (*AC*/*CB*) este egal cu raportul dintre lungimea întregii drepte și lungimea segmentului mai lung (*AB*/*AC*), atunci spunem că linia a fost împărțită în „raport extrem și mediu“. Din secolul XIX, acest raport e cunoscut îndeobște ca secțiunea de aur. Folosind o algebră elementară, se poate dovedi că secțiunea de aur este egală cu

$$(1 + \sqrt{5}) / 2 = 1{,}6180339887\ldots$$

Prima întrebare pe care o puteți pune este de ce a vrut Euclid să definească această împărțire particulară a dreptei și să dea un

nume raportului? La urma urmelor, există o infinitate de moduri în care poate fi împărțită o dreaptă. Răspunsul la această întrebare poate fi găsit în tradiția mistică și culturală provenind de la pitagoricieni și de la Platon. Amintiți-vă că pitagoricienii erau obsedați de numere. Ei credeau că numerele impare erau masculine și bune, iar numerele pare feminine și rele. Aveau o slăbiciune aparte pentru numărul 5, uniunea dintre 2 și 3, primul număr par (feminin) și primul număr impar (masculin). (1 nu era considerat număr, ci sursa tuturor numerelor.) Pentru pitagoricieni, deci, numărul 5 întruchipa dragostea și căsnicia, iar ei foloseau pentagrama – steaua cu cinci colțuri (figura 63) – ca simbol al frăției lor. Aici își face apariția pentru prima oară secțiunea de aur. Dacă luăm o pentagramă regulată, raportul dintre latura oricărui triunghi și baza sa (*a/b* în figura 63) este egal cu secțiunea de aur. În mod asemănător, raportul dintre oricare diagonală a pentagonului regulat și latura sa (*c/d* în figura 64) este de asemenea egal cu secțiunea de aur. De fapt, pentru a construi un pentagon cu rigla și compasul (metoda obișnuită de construcție geometrică a vechilor greci) e nevoie de împărțirea unei drepte în secțiunea de aur.

Platon a adăugat încă o dimensiune semnificației mitice a secțiunii de aur. Grecii credeau că totul în univers e alcătuit din patru elemente: pământ, foc, aer și apă. În *Timaios*, Platon a încercat să explice structura materiei folosind cele cinci corpuri regulate care îi poartă acum numele (figura 65). Aceste poliedre convexe – tetraedrul, cubul, octaedrul, dodecaedrul și icosaedrul – sunt singurele în care toate fețele (ale fiecărui corp) sunt identice și sunt poligoane regulate, iar toate vârfurile sunt așezate pe suprafața unei sfere. Platon a asociat patru din cele cinci corpuri platoniciene cu cele patru elemente cosmice fundamentale. De pildă, pământul a fost asociat cu stabilul cub, penetrantul foc cu ascuțitul

Figura 62

tetraedru, aerul cu octaedrul, iar apa cu icosaedrul. În ce privește dodecaedrul (figura 65d), Platon spune în *Timaios*: „Dar mai rămânea o ultimă combinație, a cincea. De ea s-a folosit zeul pentru alcătuirea întregului, desenând structura acestuia din dodecaedre.“* Astfel, dodecaedrul reprezenta universul ca întreg. Observați însă că dodecaedrul, cu cele douăsprezece suprafețe ale sale pentagonale, are pretutindeni secțiunea de aur înscrisă în el. Atât volumul, cât și aria suprafeței sale pot fi exprimate simplu în funcție de secțiunea de aur (același lucru e valabil și pentru icosaedru).

Istoria arată deci că, prin numeroase încercări succesive, pitagoricienii și discipolii lor *au descoperit* căi de a construi anumite figuri geometrice care, pentru ei, reprezentau concepte importante precum dragostea și întregul cosmos. Nu e de mirare că ei și Euclid (care a studiat această tradiție) *au inventat noțiunea* de secțiune de aur, care era implicată în aceste construcții, și i-au dat un nume. Spre deosebire de orice alt raport arbitrar, numărul 1,618… s-a aflat în centrul a numeroase și intense studii, și continuă să apară chiar și azi în cele mai neașteptate locuri. De pildă, la două mii de ani după Euclid, astronomul german Johannes Kepler *a descoperit*

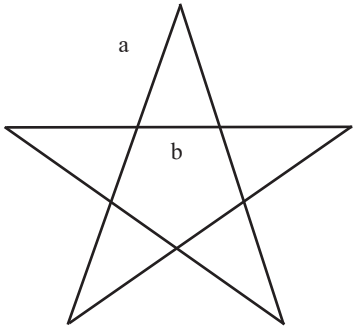


Figura 63

* *Timaios* (în Platon, *Opere VII*, Editura Științifică, București, 1993). (*N. t.*)

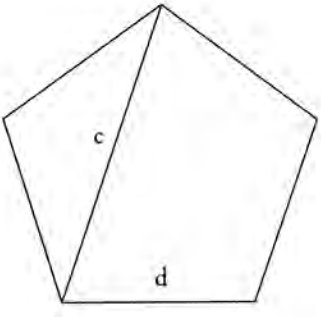


Figura 64

că acest număr apare, în chip miraculos, în legătură cu o serie de numere cunoscute drept *șirul lui Fibonacci*. Șirul lui Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233…) are proprietatea că, începând cu al treilea termen, fiecare număr e suma celor două numere anterioare (de exemplu: 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3 etc.). Dacă împărțim fiecare termen al șirului la termenul imediat precedent (de pildă 144 ÷ 89; 233 ÷ 144 …), găsim că rapoartele oscilează, dar se apropie tot mai mult de secțiunea de aur, pe măsură ce înaintăm în șir. Rotunjind la a șasea zecimală, obținem de exemplu: 144 ÷ 89 = 1,617978; 233 ÷ 144 = 1,618056; 377 ÷ 233 = 1,618026 etc.

Mai aproape de noi, în epoca modernă, șirul lui Fibonacci și, prin urmare, și secțiunea de aur și-au făcut apariția în ordinea în care sunt aranjate frunzele pe tulpina unei plante (fenomen numit *filotaxie*) și în structura cristalelor anumitor aliaje pe bază de aluminiu.

De ce cred că definiția dată de Euclid noțiunii de secțiune de aur este o invenție? Pentru că actul inventiv al lui Euclid a pus în evidență acest raport și a atras atenția matematicienilor asupra lui. Pe de altă parte, în China, unde noțiunea de secțiune de aur nu fusese inventată, literatura matematică nu conține practic nici o referire la aceasta. În India, unde, iarăși, noțiunea nu fusese inventată, apar în trigonometrie doar câteva teoreme nesemnificative care implică vag acest raport.

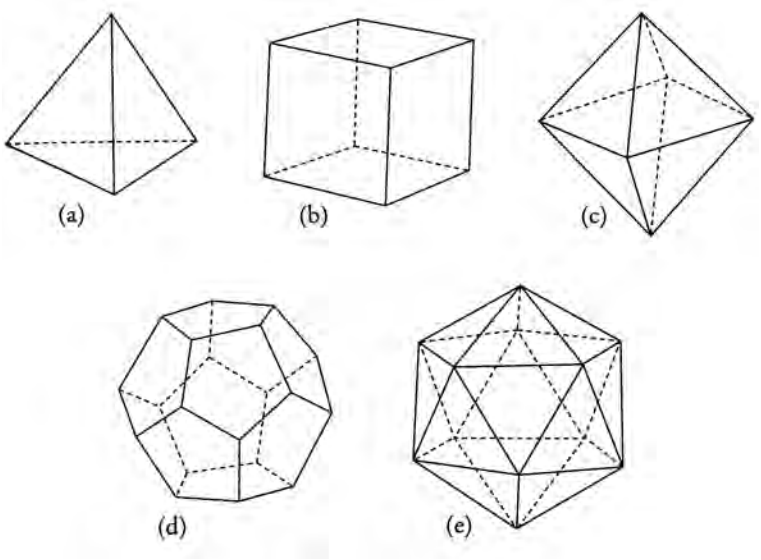


Figura 65

Există multe alte exemple care demonstrează că întrebarea „Matematica este descoperire sau invenție?“ e prost pusă. *Matematica noastră este o combinație de invenții și descoperiri*. Axiomele geometriei euclidiene, în calitate de *concept*, sunt o invenție, la fel ca regulile jocului de șah. Axiomelor li s-au adăugat o mulțime de concepte inventate: triunghiuri, paralelograme, elipse, secțiunea de aur etc. Pe de altă parte, teoremele geometriei euclidiene au fost descoperiri; ele sunt căile ce leagă diferitele concepte. În unele cazuri, demonstrațiile au generat teoreme – matematicienii au studiat ce puteau demonstra, iar de aici au dedus teoremele. În altele, după cum arată Arhimede în *Metoda* sa, mai întâi au găsit răspunsul la o problemă particulară care îi interesa, apoi au elaborat demonstrația.

Conceptele sunt esențialmente invenții. Numerele prime, în calitate de *concept*, sunt o invenție, dar toate teoremele legate de numerele prime sunt descoperiri. Vechii matematicieni din Babilon,

Egipt și China n-au inventat conceptul de număr prim, în pofida matematicii lor avansate. Pe de altă parte, putem spune că ei n-au „descoperit“ numerele prime? Nu mai mult decât putem spune că Marea Britanie n-a „descoperit“ o constituție codificată ca un document unic. Așa cum o țară poate supraviețui fără o constituție, o matematică se poate dezvolta fără conceptul de număr prim. Și s-a dezvoltat!

Știm oare de ce grecii au inventat concepte precum axiomele și numerele prime? Nu cu certitudine, dar putem bănui că aceasta ținea de încercarea lor de a ajunge la constituenții fundamentali ai universului. Numerele prime erau cărămizile de bază ale numerelor, la fel cum atomii erau cărămizile materiei, iar axiomele erau fântâna din care se presupunea că aveau să curgă toate adevărurile geometrice. Dodecaedrul reprezenta întregul cosmos, iar secțiunea de aur era conceptul care a adus la viață acest simbol.

Această discuție subliniază un alt aspect interesant al matematicii – ea aparține culturii umane. Odată ce grecii au inventat metoda axiomatică, toată matematica europeană ulterioară a urmat-o întocmai și a adoptat aceeași filozofie și aceleași metode. Antropologul Leslie A. White (1900–1975) a încercat odată să rezume această latură culturală observând: „Dacă Newton ar fi fost crescut în cultura hotentotă [trib din Africa de Sud], ar fi calculat ca un hotentot.“ Această dimensiune culturală a matematicii este pesemne răspunzătoare de faptul că multe descoperiri matematice (de exemplu, invarianții nodurilor) și chiar și unele invenții importante (de exemplu, calculul infinitezimal) au fost făcute simultan de diferiți oameni care lucrau independent.

Vorbiți matematica?

Într-o secțiune precedentă, am comparat semnificația conceptului abstract de număr cu cea a sensului unui cuvânt. Este atunci matematica un fel de limbaj? Rezultate obținute în logica matematică, pe de o parte, și în lingvistică, pe de alta, arată că, până la un punct,

matematica este un limbaj. Cercetările lui Boole, Frege, Peano, Russell, Whitehead, Gödel și ale urmașilor lor moderni (în special în domenii precum sintaxa filozofică și semantica, și în paralel în lingvistică) au demonstrat că gramatica și raționamentul sunt strâns legate de o algebră a logicii simbolice. De ce există însă peste 6 500 de limbi, dar o singură matematică? Adevărul este că toate limbile au în comun mai multe caracteristici. De pildă, lingvistul american Charles F. Hockett (1916–2000) a atras atenția prin anii 1960 asupra faptului că toate limbile dețin mijloace pentru a crea noi cuvinte și sintagme (de pildă, „home page“, „laptop“, „indie flick“). De asemenea, toate limbile umane permit abstracțiunea („suprarealism“, „absență“, „măreție“), negația („nu“, „n-a“) și frazele condiționale („Dacă bunica ar avea roți, ar fi autobuz“). Poate că două dintre cele mai importante caracteristici ale tuturor limbilor sunt *nelimitarea* și *independența față de stimul*. Prima proprietate reprezintă capacitatea de a crea formulări nemaiauzite și de a le înțelege. De pildă, pot genera o propoziție de tipul: „Nu poți repara barajul Hoover cu gumă de mestecat“ și, chiar dacă n-ați întâlnit-o înainte, nu vă e greu s-o înțelegeți. Independența față de stimul e capacitatea de a alege cum răspundem la un stimul, sau dacă trebuie s-o facem. De pildă, răspunsul la întrebarea pusă de cântăreața/compozitoarea Carole King în cântecul său „Ai să mă iubești și mâine?“ poate fi oricare dintre următoarele: „Nu știu dacă voi mai fi în viață mâine“; „Absolut“; „Nu te iubesc nici azi“; „Nu atât de mult cât îmi iubesc câinele“; „Ăsta e de departe cel mai bun cântec al tău“ sau chiar „Mă întreb cine va câștiga Open-ul australian anul ăsta“. Veți recunoaște că multe dintre aceste trăsături (de pildă, abstractizare, negație, nelimitare și capacitatea de a evolua) sunt caracteristice și matematicii.

După cum am văzut mai sus, Lakoff și Núñez au subliniat rolul metaforei în matematică. Specialiștii în lingvistică cognitivă susțin și ei că toate limbajele umane folosesc metafore pentru a exprima aproape totul. Mai mult, din 1957 (anul în care lingvistul Noam Chomsky și-a publicat celebrele sale *Structuri sintactice*), multe studii lingvistice au gravitat în jurul conceptului de *gramatică*

universală – principii care guvernează toate limbile. Cu alte cuvinte, ceea ce pare a fi un Turn Babel al diversității ar putea ascunde în realitate o surprinzătoare asemănare structurală. De fapt, dacă lucrurile n-ar sta așa, dicționarele care traduc dintr-o limbă în alta n-ar putea funcționa.

Vă puteți încă întreba de ce matematica e atât de uniformă în ce privește conținutul și notația simbolică. Mai cu seamă prima parte a întrebării e contrariantă. Majoritatea matematicienilor sunt de acord că matematica, așa cum o cunoaștem noi, s-a dezvoltat din ramurile elementare ale geometriei și aritmeticii practicate de vechii babilonieni, egipteni și greci. Și totuși, era cu adevărat inevitabil ca matematica să înceapă anume cu aceste discipline? Informaticianul Stephen Wolfram susține în masiva sa carte *Un nou tip de știință* că lucrurile nu trebuiau neapărat să stea așa. În particular, Wolfram arată că, pornind de la seturi simple de reguli care acționează ca niște scurte programe de calculator (numite *automate celulare*), se poate dezvolta un tip foarte diferit de matematică. Aceste automate celulare ar putea fi folosite (cel puțin în principiu) ca instrumente elementare de modelare a fenomenelor naturale, în locul ecuațiilor diferențiale care au dominat știința timp de trei secole. Ce a îndemnat atunci vechile civilizații spre descoperirea și inventarea „mărcii“ noastre speciale de matematică? Nu știu, dar poate că s-a legat de particularitățile sistemului uman de percepție. Oamenii detectează și percep cu mare ușurință unghiurile, liniile drepte și curbele line. Observați, de pildă, cu ce precizie putem determina (numai din ochi) dacă o linie e perfect dreaptă, sau cât de ușor ne e să distingem între un cerc și o formă ușor eliptică. Aceste capacități perceptive au influențat pesemne felul în care cunoaștem și au condus la o matematică bazată pe obiecte discrete (aritmetica) și figuri geometrice (geometria euclidiană).

Uniformitatea notației simbolice este probabil rezultatul a ceea ce poate fi numit „efectul Microsoft Windows“: întreaga lume folosește sistemul de operare Microsoft – nu pentru că ar fi inevitabil, ci fiindcă, odată ce a început să domine piața calculatoarelor,

toată lumea a fost nevoită să-l adopte pentru a ușura comunicarea și a avea la îndemână produsele. În mod asemănător, notația simbolică occidentală a impus uniformitatea în lumea matematicii.

E interesant de observat că astronomia și astrofizica au, la rândul lor, un cuvânt de spus în problema „invenție și descoperire". Cele mai recente studii asupra planetelor extrasolare arată că aproximativ 5% dintre stele au cel puțin o planetă gigantică (cum e Jupiter în sistemul nostru solar) care se rotește în jurul lor, iar acest raport rămâne în linii mari constant, în medie, în întreaga Cale Lactee. Deși nu cunoaștem încă procentajul planetelor *terestre* (de tipul Pământului), sunt șanse ca în galaxie să existe miliarde de asemenea planete. Chiar dacă doar o mică (dar nu neglijabilă) parte dintre aceste „Pământuri" se află în *zona locuibilă* (domeniul orbitelor care permit existența apei sub formă lichidă pe suprafața planetei) din jurul stelelor-gazdă, probabilitatea ca viața în general, și viața inteligentă în particular să se dezvolte pe suprafața acestor planete nu este nulă. Dacă am descoperi o altă formă de viață inteligentă cu care să putem comunica, am dobândi informații inestimabile despre formalismele elaborate de această civilizație pentru explicarea cosmosului. Nu numai că am face progrese colosale în înțelegerea originii și evoluției vieții, dar am și compara logica noastră cu sistemul logic al unor ființe posibil mai avansate.

Într-o notă mult mai speculativă, unele scenarii din cosmologie (de exemplu, cel numit *eterna inflație*) prezic posibilitatea existenței universurilor multiple. În unele dintre aceste universuri ar putea fi diferite nu numai valorile *constantelor naturii* (de exemplu, tăriile diverselor forțe; rapoartele dintre masele particulelor subatomice), dar și legile naturii. Astrofizicianul Max Tegmark susține chiar că ar trebui să existe câte un univers care să corespundă cu (sau *să fie*, după cum se exprimă el) fiecare structură matematică posibilă. Dacă acest lucru ar fi adevărat, am avea o versiune extremă a ideii că universul este matematică – nu există doar o lume care să poată fi identificată cu matematica, ci un întreg ansamblu de lumi. Din păcate, această speculație nu numai că e radicală și netestabilă în momentul de față, dar pare și să

contrazică (cel puțin în forma sa cea mai simplă) ceea ce se numește *principiul mediocrității*. După cum am arătat în capitolul 5, dacă luați un om la întâmplare de pe stradă, există o probabilitate de 95% ca înălțimea lui să se afle într-un interval de două abateri standard centrat pe valoarea medie a înălțimii. Un argument asemănător ar trebui să se aplice proprietăților universului, dar numărul structurilor matematice posibile crește spectaculos odată cu sporirea complexității. Aceasta înseamnă că structura „cea mai mediocră" (apropiată de medie) ar trebui să fie extrem de complicată, ceea ce pare să intre în conflict cu relativa simplitate a matematicii noastre și a teoriilor pe care le-am conceput despre univers, contrazicându-ne astfel așteptările firești ca universul nostru să fie unul tipic.

Misterul lui Wigner

„Matematica este creată sau descoperită?" e o întrebare greșit pusă fiindcă presupune că răspunsul trebuie să fie ori una, ori alta, și că cele două posibilități se exclud reciproc. Eu aș sugera în schimb că matematica e în parte creată și în parte descoperită. Oamenii inventează de regulă concepte matematice și descoperă relațiile dintre ele. Unele descoperiri empirice au precedat formularea conceptelor, dar conceptele însele au oferit fără îndoială un stimulent pentru descoperirea altor teoreme. Se cuvine să adaug că unii filozofi ai matematicii, cum ar fi americanul Hilary Putnam, adoptă o poziție intermediară numită *realism* – ei cred în obiectivitatea discursului matematic (adică propozițiile sunt adevărate sau false, iar ceea ce le face adevărate sau false se află în afara oamenilor), fără a accepta, ca Platon, existența „obiectelor matematice". Conduce vreuna dintre aceste perspective la o explicație mulțumitoare a misterului lui Wigner privind „imprevizibila eficacitate a matematicii"?

Îngăduiți-mi întâi să trec repede în revistă câteva dintre soluțiile propuse de gânditorii contemporani. David Gross, laureat al Premiului Nobel pentru fizică, spune:

> Există o opinie care, din câte știu, e destul de răspândită printre matematicienii de creație – aceea că structurile matematice la care ajung nu sunt creații artificiale ale minții umane, ci au o anume naturalețe, părând la fel de reale ca structurile create de fizicieni pentru a descrie așa-numita lume reală. Cu alte cuvinte, matematicienii nu inventează o nouă matematică, ci o descoperă. Dacă așa stau lucrurile, atunci poate că unele dintre misterele pe care le-am cercetat [„imprevizibila eficacitate"] devin mai puțin misterioase. Dacă matematica se ocupă cu structuri care sunt o parte reală a lumii naturale, la fel de reală precum conceptele din fizica teoretică, atunci nu e surprinzător că matematica este un instrument eficient în analizarea lumii reale.

Cu alte cuvinte, Gross se sprijină aici pe o versiune a ideii că matematica e descoperire, undeva între perspectiva platoniciană și cea conform căreia „universul *este* matematică", dar mai aproape de prima. După cum am văzut, filozofic, e totuși greu să susții că matematica este descoperire. Apoi, platonismul nu poate rezolva cu adevărat problema formidabilei precizii despre care am vorbit în capitolul 8, lucru recunoscut de Gross.

Sir Michael Atiyah, a cărui perspectivă asupra naturii matematicii am adoptat-o și eu în mare parte, susține următoarele:

> Dacă privim creierul în contextul său evolutiv, atunci misteriosul succes al matematicii în științele fizice se explică cel puțin parțial. Creierul a evoluat pentru a se putea ocupa de lumea fizică, iar atunci n-ar trebui să ne surprindă că a elaborat un limbaj, matematica, bine adaptat acestui scop.

Acest raționament seamănă mult cu soluțiile propuse de cognitiviști. Atiyah recunoaște însă, la rândul lui, că explicația sa atinge doar superficial cele mai spinoase laturi ale problemei – felul în care matematica lămurește cele mai ezoterice aspecte ale lumii fizice. În particular, această explicație lasă complet neelucidată ceea ce am numit eficacitatea „pasivă" a matematicii (conceptele matematice își găsesc aplicații la mult timp după ce au fost inventate).

Atiyah observă: „Scepticul poate spune că lupta pentru supraviețuire ne cere să facem față doar fenomenelor fizice la scara umană, în timp ce teoria matematică pare să poată fi aplicată cu succes la toate scările, de la cea atomică la cea galactică.“ Prin urmare, singura lui soluție este: „Poate că explicația rezidă în natura ierarhică abstractă a matematicii, care ne permite să urcăm și să coborâm pe scara lumii cu relativă ușurință.“

Matematicianul și informaticianul american Richard Hamming (1915–1989) a făcut în 1980 o amănunțită și interesantă analiză a misterului lui Wigner. Mai întâi, în privința naturii matematicii, a conchis că „matematica a fost făurită de om și, prin urmare, poate fi în permanență modificată de el“. Apoi, a propus patru explicații posibile pentru imprevizibila ei eficacitate: (1) efectele selecției; (2) evoluția instrumentelor matematice; (3) puterea explicativă limitată a matematicii; (4) evoluția oamenilor.

Să ne amintim că efectele selecției sunt distorsiuni introduse în rezultatele experimentelor fie de dispozitivele folosite, fie prin modul în care sunt obținute datele. De pildă, dacă într-un test privind eficacitatea unui regim alimentar, cercetătorul îi exclude pe toți cei care părăsesc testul, aceasta va influența rezultatul, fiindcă e foarte probabil ca aceia care renunță să fie tocmai cei la care programul nu dă rezultate. Cu alte cuvinte, Hamming spune că, cel puțin în unele cazuri, „fenomenul inițial apare din instrumentele matematice folosite, și nu din lumea reală […] mare parte din ceea ce vedem provine din ochelarii pe care îi purtăm“. Ca exemplu, el subliniază faptul cunoscut că orice forță care emană simetric dintr-un punct (și conservă energia) trebuie să fie, în spațiul tridimensional, invers proporțională cu pătratul distanței – prin urmare aplicabilitatea legii newtoniene a gravitației n-ar trebui să ne surprindă. Observația lui Hamming e corectă, dar efectele selecției nu pot explica formidabila precizie a anumitor teorii.

A doua soluție posibilă a lui Hamming se bazează pe faptul că oamenii selectează și perfecționează continuu matematica pentru a se potrivi unei situații date. Cu alte cuvinte, Hamming lansează ideea că asistăm la ceea ce am putea numi „evoluția și

selecția naturală“ a ideilor matematice – oamenii inventează un număr mare de concepte matematice, și sunt alese doar acelea care se potrivesc. Ani de zile am crezut și eu că aceasta este explicația completă. O interpretare asemănătoare a fost propusă de Steven Weinberg, laureat al Premiului Nobel pentru fizică, în cartea sa *Visul unei teorii finale**. Poate să fie *aceasta* explicația misterului lui Wigner? Nu încape îndoială că o asemenea selecție are într-adevăr loc. După cernerea diverselor formalisme și instrumente matematice, oamenii de știință le păstrează pe cele care funcționează, și nu ezită să le aducă la zi sau să le schimbe atunci când apar altele mai bune. Dar, chiar dacă acceptăm această idee, de ce există de fapt teorii matematice care pot explica universul?

A treia idee a lui Hamming este că impresia noastră privind eficacitatea matematicii poate fi în realitate o iluzie, căci matematica nu explică multe lucruri din lumea înconjurătoare. În sprijinul acestei perspective, l-aș putea cita pe matematicianul Israïl Moiseevici Gelfand: „Există doar un lucru mai imprevizibil decât imprevizibila eficacitate a matematicii în fizică, și anume imprevizibila *ineficacitate* [s. m.] a matematicii în biologie.“ Nu cred că, în sine, această afirmație poate lămuri problema lui Wigner. Este adevărat că, spre deosebire de soluția din *Ghidul autostopistului galactic***, nu putem spune că răspunsul la viață, la univers și la tot ce există este „patruzeci și doi“. Cu toate acestea, există destule fenomene pe care matematica le elucidează *într-adevăr*, pentru a fi îndreptățiți s-o considerăm o explicație. Mai mult, spectrul faptelor și proceselor care pot fi interpretate de matematică se lărgește continuu.

Cea de-a patra explicație a lui Hamming seamănă mult cu cea propusă de Atiyah – „Evoluția darwinistă selectează în mod natural acele forme de viață aflate în competiție, care au în mințile lor

---

* Cartea a apărut în traducere românească la Editura Humanitas în 2009. (*N. t.*)

** *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy* – roman științifico-fantastic de Douglas Adams, după care s-a făcut un film celebru. (*N. t.*)

cele mai bune modele ale realității – «cele mai bune» însemnând cele mai bune pentru supraviețuire și propagare."

Informaticianul Jef Raskin (1943–2005), cel care a inițiat proiectul Macintosh pentru Apple Computer, merge în aceeași direcție, cu un accent pus pe rolul logicii. Raskin conchide că

> logica umană ne-a fost impusă de lumea fizică și e, prin urmare, în concordanță cu aceasta. Matematica provine din logică. De aceea matematica nu intră în contradicție cu lumea fizică. Nu e aici nici un mister – dar nu trebuie să ne pierdem sentimentul de mirare și de uimire în fața naturii lucrurilor, chiar dacă ajungem să le înțelegem mai bine.

Hamming e însă mai puțin convins – chiar și de forța propriului său argument:

> Dacă acceptăm că știința în genere are o vechime de 4000 de ani, înseamnă că avem de-a face cu cel mult 200 de generații. Considerând efectele previzibile ale evoluției prin selecția variațiilor cu probabilitate mică, cred că evoluția nu poate explica decât o mică parte din imprevizibila eficacitate a matematicii.

Raskin insistă asupra faptului că „bazele matematicii au fost puse cu mult înainte în strămoșii noștri, probabil cu milioane de generații în urmă". Trebuie să spun însă că acest argument nu mi se pare prea convingător. Chiar dacă logica a fost adânc întipărită în creierele strămoșilor noștri, e greu de înțeles cum această aptitudine a putut conduce la teoriile matematice ale lumii subatomice, cum este atât de precisa mecanică cuantică.

Hamming își încheie articolul recunoscând că „toate explicațiile pe care le-am dat, luate împreună, pur și simplu nu sunt de-ajuns pentru a explica ceea ce mi-am propus" (anume, imprevizibila eficacitate a matematicii).

Ar trebui oare să încheiem acceptând faptul că eficacitatea matematicii rămâne la fel de misterioasă cum ni se părea la început?

Înainte de a ne da bătuți, să încercăm să distilăm esența misterului lui Wigner examinând ceea ce numim *metoda științifică*. Oamenii de știință află despre realitățile din natură printr-o serie de experimente și observații. Datele sunt la început folosite pentru a elabora modele calitative ale fenomenelor (de pildă, că Pământul atrage merele, că particulele subatomice care se ciocnesc pot produce alte particule sau că universul se află în expansiune). În multe ramuri ale științei, chiar și teoriile care apar pot rămâne nematematice. Unul dintre cele mai bune exemple de teorie de acest tip, având o mare forță explicativă, este teoria darwinistă a evoluției. Chiar dacă selecția naturală nu se bazează pe un formalism matematic, succesul ei în lămurirea originii speciilor e remarcabil. Pe de altă parte, în fizica fundamentală următorul pas implică de regulă încercări de a construi teorii matematice cantitative (de exemplu, relativitatea generală, electrodinamica cuantică, teoria corzilor etc.). În fine, cercetătorii folosesc acele modele matematice pentru a prezice noi fenomene, noi particule și rezultate ale unor experimente și observații care n-au fost efectuate până atunci. Ceea ce i-a nedumerit pe Wigner și Einstein a fost incredibilul succes al acestor două ultime etape. Cum e posibil ca fizicienii să descopere mereu instrumente matematice nu doar pentru a explica rezultatele experimentale și observațiile existente, dar și pentru a conduce la o înțelegere absolut nouă și la noi predicții?

Voi încerca să răspund la această versiune a întrebării împrumutând un frumos exemplu de la matematicianul Reuben Hersh. Hersh a propus ca, în spiritul analizei în numeroase asemenea probleme de matematică (și de fizică teoretică), să examinăm cel mai simplu caz posibil. Să considerăm aparent banalul experiment în care punem pietricele într-un vas opac. Să presupunem că punem întâi patru pietricele albe, iar apoi șapte pietricele negre. La un moment dat în istorie, oamenii au învățat că, pentru anumite scopuri, ei pot reprezenta un ansamblu de pietricele de orice culoare printr-un concept abstract inventat de ei – numărul natural. Prin urmare, ansamblul de pietricele albe putea fi asociat cu numărul 4 (sau IIII sau IV sau oricare va fi fost simbolul folosit la

acea vreme), iar pietricelele negre cu numărul 7. Prin experimente de tipul celui prezentat mai sus, oamenii au descoperit de asemenea că un alt concept inventat – adunarea aritmetică – reprezenta corect acțiunea fizică de acumulare. Cu alte cuvinte, rezultatul procesului abstract notat simbolic prin 4 + 7 poate prezice fără greș numărul final de pietricele din vas. Ce înseamnă asta? Înseamnă că oamenii au elaborat un formidabil instrument matematic – unul care poate prezice corect rezultatul *oricărui* experiment de acest tip! Acest instrument e în realitate mult mai puțin banal decât pare, deoarece același instrument nu funcționează, de pildă, în cazul picăturilor de apă. Dacă punem patru picături de apă într-un vas, urmate de alte șapte picături, nu obținem unsprezece picături de apă în vas. De fapt, pentru a face o predicție în experimente asemănătoare cu lichide (sau gaze), oamenii au trebuit să inventeze concepte cu totul diferite (greutatea, de exemplu) și să înțeleagă că trebuie să cântărească individual fiecare picătură sau volum de gaz.

Concluzia e clară. Instrumentele matematice n-au fost alese în mod arbitrar, ci tocmai pe baza capacității lor de a prezice corect rezultatele experimentelor și observațiilor relevante. Prin urmare, cel puțin în acest caz foarte simplu, eficacitatea instrumentelor era garantată. Oamenii n-au trebuit să ghicească dinainte care era matematica corectă. Natura le permitea luxul încercărilor succesive pentru a afla dacă funcționau. Oamenii n-au trebuit nici să rămână agățați de aceleași instrumente în toate împrejurările. Uneori, dacă nu exista formalismul matematic potrivit pentru o anumită problemă, el trebuia inventat (cum s-a întâmplat cu Newton când a creat calculul infinitezimal sau cu matematicienii moderni care au ajuns la diverse idei topologice/geometrice în cercetările actuale din teoria corzilor). În alte cazuri, formalismul exista deja, dar cineva a trebuit să descopere că aceea era soluția care își aștepta problema potrivită (cum s-a întâmplat când Einstein a folosit geometria riemanniană sau când fizicienii din domeniul particulelor elementare au folosit teoria grupurilor). Ideea este că, prin curiozitate permanentă, perseverență, imaginație creatoare și hotărâre de

neclintit, oamenii au găsit formalismele matematice relevante pentru a modela o gamă largă de fenomene fizice.

O trăsătură a matematicii esențială pentru ceea ce am numit eficacitatea „pasivă“ este eterna ei valabilitate. Geometria euclidiană rămâne și azi la fel de corectă cum era în anul 300 î. Cr. Înțelegem acum că axiomele ei nu sunt inevitabile și nu reprezintă adevăruri absolute despre spațiu, ci adevăruri în cadrul unui univers particular, perceput de oameni, și formalismul asociat lui, inventat de oameni. Și totuși, odată ce înțelegem contextul lor mai limitat, toate teoremele rămân adevărate. Cu alte cuvinte, ramuri ale matematicii sunt încorporate în ramuri mai vaste, mai cuprinzătoare (de pildă, geometria euclidiană e doar una din versiunile posibile ale geometriei), dar valabilitatea în cadrul fiecărei ramuri persistă. Această longevitate nedefinită este cea care le-a permis oamenilor de știință să caute la orice moment instrumente matematice potrivite în întregul arsenal al formalismelor elaborate.

Exemplul simplu al pietricelelor dintr-un vas tot nu rezolvă două dintre aspectele misterului lui Wigner. În primul rând, se pune întrebarea de ce, în unele cazuri, s-ar părea că o teorie ne oferă mai multă precizie decât am pus inițial în ea? În experimentul cu pietricele, precizia rezultatelor „prezise“ (adunarea altor numere de pietricele) nu e cu nimic mai bună decât precizia experimentelor care au condus la formularea „teoriei“ (adunarea aritmetică) de la bun început. Pe de altă parte, în teoria newtoniană a gravitației, de pildă, precizia predicțiilor s-a dovedit cu mult superioară celei a observațiilor care au generat-o. De ce? O scurtă reexaminare a istoriei teoriei lui Newton ne poate oferi unele indicii.

Modelul geocentric al lui Ptolemeu a fost cel dominant vreme de aproximativ cincisprezece secole. Deși nu avea pretenții de universalitate – mișcarea fiecărei planete era tratată individual – și nu se menționau cauzele fizice (de pildă, forțele, accelerația), acordul cu observațiile era destul de bun. Nicolaus Copernic (1473–1543) și-a publicat modelul heliocentric în 1543, iar Galilei l-a așezat pe baze solide. Galilei a stabilit de asemenea fundamentele pentru legile mișcării, dar Kepler a fost acela care a dedus din

observații primele legi matematice (deși doar fenomenologice) ale mișcării planetelor. Kepler a folosit un uriaș corp de date, lăsate de astronomul Tycho Brahe, pentru a determina orbita lui Marte. A numit sutele de pagini de calcule rezultând de aici „războiul meu cu Marte“. Cu excepția a două nepotriviri, o orbită circulară era în acord cu toate observațiile, dar Kepler n-a fost mulțumit de această soluție, iar mai târziu avea să scrie despre raționamentele pe care le-a făcut: „Dacă aș fi crezut că puteam ignora aceste opt minute [de arc; aproximativ un sfert din diametrul Lunii pline], mi-aș fi dres ipoteza […] în mod corespunzător. Pentru că nu le puteam însă neglija, numai aceste opt minute mi-au arătat calea către o prefacere totală a astronomiei.“ Consecințele meticulozității sale au fost spectaculoase. Kepler a dedus că orbitele planetelor nu sunt circulare, ci eliptice, și a formulat în plus două legi cantitative care se aplică *tuturor* planetelor. Când aceste legi au fost cuplate cu legile de mișcare ale lui Newton, ele au servit ca bază pentru legea newtoniană a gravitației universale. Să ne amintim însă că, între timp, Descartes propusese teoria vârtejurilor, în care planetele erau antrenate în jurul Soarelui de vârtejuri de particule aflate în mișcare circulară. Această teorie nu putea ajunge prea departe, nici măcar înainte ca Newton să-i dovedească falsitatea, pentru simplul motiv că Descartes n-a elaborat niciodată o tratare matematică sistematică a vârtejurilor.

Ce ne spune această scurtă poveste? Nu încape îndoială că legea newtoniană a gravitației a fost opera unui geniu, dar un geniu care nu lucra în neant. O parte din fundamente fuseseră stabilite cu mari eforturi de înaintași. După cum am văzut în capitolul 4, matematicieni fără anvergura lui Newton, cum au fost arhitectul Christopher Wren și fizicianul Robert Hooke, au propus în mod independent o lege a atracției invers proporțională cu pătratul distanței. Măreția lui Newton s-a vădit în capacitatea sa unică de a aduna totul laolaltă sub forma unei teorii unificatoare și în stăruința de a da o demonstrație matematică a consecințelor teoriei sale. De ce era acest formalism atât de precis? În parte, pentru că trata o problemă fundamentală – forțele dintre două corpuri care

gravitează și mișcarea rezultantă. Nu apăreau alți factori care să complice lucrurile. Pentru această problemă, și numai pentru ea, Newton a obținut o soluție completă. Prin urmare, teoria fundamentală era extrem de precisă, dar consecințele ei trebuiau permanent îmbunătățite. Sistemul solar nu e alcătuit doar din două corpuri. Dacă includem efectele altor planete (tot după legea inversului pătratului), orbitele nu mai sunt simple elipse. De pildă, s-a descoperit că orbita Pământului își schimbă ușor orientarea în spațiu, într-o mișcare numită *precesie*, asemănătoare celei a axei unui titirez care se învârte. De fapt, studiile moderne au arătat că, în ciuda predicțiilor lui Laplace, orbitele planetelor pot deveni în cele din urmă haotice. Însăși teoria fundamentală a lui Newton a fost mai târziu înglobată în relativitatea generală a lui Einstein, iar apariția acesteia din urmă a fost și ea precedată de o serie de starturi ratate și eșecuri. Astfel, precizia unei teorii nu poate fi anticipată. Pomul se cunoaște după roade – se fac în permanență modificări și îmbunătățiri până se ajunge la precizia dorită. Rarele cazuri în care o precizie superioară e atinsă dintr-un singur pas par adevărate miracole.

Există, desigur, un lucru esențial aflat în culise și care face să aibă sens căutarea legilor fundamentale: faptul că natura a fost atât de bună cu noi încât să fie guvernată de legi *universale*, iar nu de simple hotărâri regionale. Un atom de hidrogen de pe Pământ, unul de la celălalt capăt al Căii Lactee, ba chiar și unul dintr-o galaxie aflată la zece miliarde de ani-lumină depărtare se comportă exact la fel – iar acest lucru rămâne valabil indiferent de direcția sau de momentul în care privim. Matematicienii și fizicienii au inventat un termen pentru aceste proprietăți: ele se numesc *simetrii* și reflectă imunitatea în raport cu schimbările de poziție, de orientare sau de moment în care pornim ceasornicul. Fără aceste simetrii (și fără altele), ar fi fost imposibil să descifrăm marele plan al naturii, fiindcă experimentele ar fi trebuit repetate continuu în fiecare punct al spațiului (presupunând că într-un asemenea univers viața ar fi cu putință). O altă trăsătură a cosmosului care stă ascunsă în culisele teoriilor matematice este *caracterul local*. Ea

reflectă capacitatea noastră de a construi „imaginea de ansamblu“ ca un puzzle, începând cu descrierea interacțiunilor simple la nivelul particulelor elementare.

Ajungem, în fine, la ultimul aspect al misterului lui Wigner: ce anume ne garantează că trebuie să existe o teorie matematică? Cu alte cuvinte, de ce există, de pildă, o teorie a relativității generale? Nu s-ar putea să nu existe pur și simplu nici o teorie matematică a gravitației?

Răspunsul e de fapt mai simplu decât v-ați putea închipui. Nu avem nici o garanție! Există o mulțime de fenomene pentru care nu se pot face predicții precise, nici măcar în principiu. Această categorie include, de pildă, o clasă de sisteme dinamice care prezintă un comportament *haotic* – cea mai mică schimbare a condițiilor inițiale poate conduce la rezultate complet diferite. Din această clasă de fenomene fac parte fluctuațiile bursei, condițiile meteorologice deasupra Munților Stâncoși, învârtirea unei bile pe o ruletă, fumul ce se ridică dintr-o țigară și orbitele planetelor din sistemul solar. Ceea ce nu înseamnă că matematicienii n-au elaborat formalisme ingenioase care atacă anumite aspecte importante ale acestor probleme, dar nu există nici o teorie deterministă pe baza căreia să facem predicții. Teoria probabilităților și statistica au fost create tocmai pentru a aborda aceste domenii unde nu există o teorie din care să obținem mult mai mult decât am introdus. În mod asemănător, un concept numit *complexitate computațională* definește limitele capacității noastre de a rezolva probleme prin algoritmi aplicabili, iar teoremele de incompletitudine ale lui Gödel marchează anumite limite ale matematicii chiar în cadrul ei. Astfel, matematica e într-adevăr extraordinar de eficientă pentru anumite descrieri, în special cele care țin de știința fundamentală, dar nu poate descrie universul în toate dimensiunile sale. Până la un punct, oamenii de știință și-au ales problemele la care să lucreze pe baza faptului că aceste probleme pot fi tratate matematic.

Am rezolvat oare o dată pentru totdeauna misterul eficacității matematicii? Eu m-am străduit, dar mă îndoiesc că toată lumea

va fi pe deplin convinsă de argumentele expuse în această carte. Pot însă cita din *Problemele filozofiei* de Bertrand Russell:

> Astfel, pentru a rezuma discuția noastră despre valoarea filozofiei: filozofia nu trebuie studiată pentru vreun răspuns tranșant la întrebările ei, căci nici un răspuns tranșant nu se poate demonstra că e adevărat, ci chiar pentru întrebările ei, fiindcă aceste întrebări lărgesc înțelegerea noastră privind ceea ce e posibil, ne îmbogățesc imaginația intelectuală și reduc siguranța dogmatică ce blochează mintea în fața speculației; dar, mai presus de toate, fiindcă, prin măreția universului pe care îl contemplă filozofia, mintea capătă la rândul ei măreție și se poate contopi cu universul, iar acesta e lucrul cel mai de preț.

Note

Capitolul 1. Misterul

pagina

11 *După cum spunea fizicianul britanic James Jeans:* Jeans 1930.

12 *Sau, așa cum se mira odată Einstein:* Einstein 1934.

12 *acesta scoate în evidență geometria ca paradigmă:* Hobbes 1651.

12 *Penrose identifică trei „lumi" diferite:* Penrose vorbește despre aceste „trei lumi" în *Emperor's New Mind* și *Road to Reality.*

13 *Eugen Wigner (1902–1995), laureat al Premiului Nobel pentru fizică:* Wigner 1960. Vom reveni de mai multe ori la acest articol.

15 *încât declara cu emfază:* Hardy 1940.

15 *Una dintre cercetările sale s-a reîncarnat:* despre legea Hardy-Weinberg, vezi de exemplu Hedrick 2004.

15 *matematicianul britanic Clifford Cocks:* Cocks a inventat în 1973 algoritmul criptografic RSA, dar la acea vreme era secret. Câțiva ani mai târziu algoritmul a fost inventat independent de R. Rivest, A. Shamir, și L. Adleman de la MIT. Vezi Rivest, Shamir și Adleman 1978. [Vezi, de asemenea, Simon Singh, *Cartea codurilor*, Editura Humanitas, București, 2005 – *N. t.*]

16 *pentru a descrie toate simetriile din lume:* O prezentare accesibilă a simetriei, teoriei grupurilor și a istoriei lor întrețesute se găsește în *The Equation That Couldn't Be Solved* (Livio 2005), Stewart 2007, Ronan 2006 și Du Sautoy 2008.

16 *A observat că un șir de numere:* O minunată prezentare pe înțelesul tuturor a apariției teoriei haosului poate fi găsită în Gleick 1987.

17 *formula Black–Scholes de evaluare:* Black și Scholes 1973.

18 *Problema comis-voiajorului a fost rezolvată:* O excelentă prezentare a problemei și a soluțiilor sale poate fi găsită în Applegate *et al.* 2007.

20 *și-a exprimat foarte clar punctul de vedere:* Changeux și Connes 1995.

20 *numerele și matematica au propria:* Gardner 2003.
21 *În recenzia:* Atiyah 1995.
22 *După cum spunea neurologul:* Changeux și Connes 1995.
23 *Ea se plânge într-un loc:* O scurtă biografie a lui Marjory Fleming poate fi găsită, de pildă, la Wallechinsky și Wallace 1975–81.
24 *a spus odată matematicinul Ian Stewart:* Stewart 2004.

Capitolul 2. Misticii: Numerologul și filozoful

pagina

25 *Descartes a fost unul dintre principalii arhitecți:* O prezentare mai amănunțită a contribuțiilor lui Descartes e dată în capitolul 4.
25 *„Nu recunosc nici o materie":* Descartes 1644.
26 *Se crede că el a introdus termenii:* Iamblichos cca 300 d. Cr.; prezentat în Guthrie 1987.
26 *biografii amănunțite ale lui Pitagora:* Laertios cca 250 d. Cr., Porphyrios cca 270 d. Cr., Iamblichos cca 300 d. Cr.
26 *i se pare greu de identificat:* Aristotel cca 350 î. Cr.; prezentat în Burkert 1972.
27 *Istoricul grec Herodot:* Herodot 440 î. Cr.
27 *Empedocle (cca 492–432 î. Cr.) adaugă plin de admirație:* Porphyrios cca 270 d. Cr.
28 *De pildă,* monada: O prezentare clară a perspectivei pitagoreice poate fi găsită în Strohmeier și Westbrook 1999.
28 *Englezul Thomas Stanley:* Stanley 1687.
28 *Faptul că cineva găsește numerele:* Pentru un excelent compendiu despre proprietățile numerelor, vezi Wells 1986.
29 *Pitagora îi cere cuiva să numere:* Citat în Heath 1921.
29 „*Jur pe cel ce-a dăruit":* Iamblichos cca 300 d. Cr; prezentat în Guthrie 1987.
30 *Când două corzi asemănătoare:* Strohmeier și Westbrook 1999; Stanley 1687.
31 *Cuvântul „gnomon":* T.L. Heath face o analiză amănunțită a termenului și a semnificației sale în diferite momente (Heath 1921). Matematicianul Theon din Smyrna (cca 70–135) a folosit termenul legat de expresia figurativă a numerelor – *Mathematics, Useful for Understanding Plato* (Theon din Smyrna cca 130 d. Cr.).
34 *„Dacă vrea cineva să dea ascultare"*: Veți observa că, în comentariul său, Proclos nu afirmă ce crede el însuși cu privire la întrebarea dacă Pitagora a fost primul care a formulat teorema. Povestea despre bou apare în scrierile lui Laertios, Porphyrios și ale istoricului Plutarh

(cca 46–120 d. Cr.). Ea se bazează pe versurile lui Apolodor. Versurile nu vorbesc însă decât despre „faimoasa propoziție“, fără a spune despre care propoziție este vorba. Vezi Laertios cca 250 d. Cr., Plutarh cca 75 d. Cr.

35 *Aceste construcții erau fără îndoială cunoscute:* Renon și Felliozat 1947, van der Waerden 1983.

36 *Filozofia elementară exprimată de tabelul:* Această cosmologie se baza pe ideea că realitatea se ivește din faptul că Materia (considerată indefinită) e modelată de Formă (considerată a fi limita).

36 *Philosophy for Dummies*: Morris 1999.

37 *Cea mai veche relatare care ne-a rămas:* Joost-Gaugier 2006.

37 *Din perspectiva problemelor:* Analize privind contribuțiile pitagoreice și influențele acestora pot fi găsite în Huffman 1999, Riedweg 2005, Joost-Gaugier 2006 și Huffman 2006 în *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

38 *Unul dintre pitagoricieni:* Fritz 1945.

39 *recunoașterea existenței infiniților „numărabili“:* Nu discut teme precum numerele transfinite și cercetările lui Cantor și Dedekind în cartea de față. Excelente relatări accesibile pot fi găsite în Aczel 2000, Barrow 2005, Devlin 2000, Rucker 1995 și Wallace 2003.

39 *încât Iamblicos spune:* Iamblichos cca 300 d. Cr.

40 *pentru pitagoricieni, nu Dumnezeu:* Netz 2005.

40 *Celebrul filozof:* Whitehead 1929.

41 *Cine a fost acest neobosit căutător:* Desigur, titlurile textelor despre Platon și ideile sale pot umple numai ele un întreg volum. Iată aici doar câteva care mi s-au părut utile. Despre Platon în general: Hamilton și Cairns 1961, Havelock 1963, Gosling 1973, Ross 1951, Kraut 1992. Despre matematică: Heath 1921, Cherniss 1951, Mueller 1991, Fowler 1999, Herz-Fischler 1998.

41 *Potrivit unui discurs:* Discursul a fost scris în 362 d. Cr., dar nu dădea nici un detaliu despre conținutul inscripției. Cuvintele inscripției apar într-o notă pe marginea unui manuscris al lui Aelius Aristides. Nota ar putea să fi fost scrisă de oratorul Sopatros (secolul IV), și spune: „Pe frontispiciul școlii lui Platon scria «Nimeni să nu intre aici dacă nu a studiat geometria». [Adică] în loc de «necinstit» sau «nedrept»: căci geometria urmărește cinstea și dreptatea.“ Nota pare să arate că inscripția lui Platon a înlocuit „om necinstit sau nedrept“ în formula obișnuită în locurile sacre („Să nu intre nici un om necinstit sau nedrept“) cu „dacă nu a studiat geometria“. Această poveste a fost repetată de filozofii alexandrini din secolul V și a ajuns în cartea C*hiliades* a lui Ioan Tzetzes (cca 1110–1180), spirit universal din secolul XII. Pentru o prezentare amănunțită, vezi Fowler 1999.

43 *Am fost dezamăgit să aflu*: Un rezumat a numeroase încercări arheologice nereușite poate fi găsit în Glucker 1978.
44 *filozof și istoric din secolul I:* Cherniss 1945, Mekler 1902.
44 *Filozoful și matematicianul neoplatonician:* Cherniss 1945, Proclos cca 450.
44 *„Așadar este necesar":* Platon cca 360 î. Cr.
45 *„știința figurilor nu e doar":* Washington 1788.
45 *nu e mai real decât umbrele proiectate:* O interesantă analiză a alegoriei poate fi găsită în Stewart 1905.
47 *Perspectiva lui Platon a stat la baza:* Pentru o analiză a platonismului și locului acestuia în filozofia matematicii, vezi Tiles 1996, Mueller 1992, White 1992, Russell 1945, Tait 1996. Pentru o prezentare mai accesibilă, vezi Davis și Hersh 1981, Barrow 1992.
48 *matematica se apropie mult de divin:* Mueller 2005.
48 *El susține că în adevărata astronomie:* Comentariile lui Platon despre astronomie și mișcarea planetelor apar în *Republica* (Platon cca 360 î. Cr.), în *Timaios* și în *Legile.* G. Vlastos și I. Mueller discută consecințele poziției lui Platon (Vlastos 1975, Mueller 1992).
50 *pentru a face publicitate:* Romanul este *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture* de A.K. Doxiadis (Doxiadis 2000).
50 *exemplu aparent nevinovat, așa-numita* conjectură a lui Catalan: pentru o prezentare amănunțită, vezi Ribenboim 1994.
51 *Unii matematicieni, filozofi, specialiști în științele cognitive:* Voi prezenta pe larg aceste păreri în capitolul 9.
51 *„Potrivit profeților, ultimul":* Bell 1940.

Capitolul 3. Magicienii: Maestrul și ereticul

pagina

53 *„Printre ființe, unele există":* Aristotel cca 330 d. Cr.; vezi și Koyre 1978.
54 *Folosind un experiment mintal ingenios*: Galilei 1589–1592.
55 *sistemul practic complet al deducției logice*: Acest lucru și alte construcții logice vor fi prezentate în capitolul 7.
56 *Atunci când istoricul matematicii:* Bell 1937.
57 *scrisă de un anume Heraclid:* Acest lucru e menționat în comentariile despre *Măsurarea cercului* de Eutocius (cca 480–540); vezi Heiberg 1910–15.
57 *mai interesat de isprăvile militare:* Plutarh cca 75 d. Cr.
57 *Archimede s-a născut la Siracuza:* Anul nașterii sale a fost determinat din *Chiliades,* opera lui Ioan Tzetzes, autor bizantin din secolul XII.

57 *Arhimede petrece un timp la Alexandria:* Dijksterhuis 1957.

59 *Acest lucru a declanșat imediat o soluție:* Arhitectul roman Marcus Vitruvius Pollio (secolul I î. Cr.) ne spune povestea în tratatul său *De architectura.* (Vezi Vitruviu, secolul I î. Cr.) Arhimede ar fi scufundat în apă o piesă de aur și una de argint, ambele cu aceeași greutate ca a coroanei. Astfel a constatat că acea coroană a dislocuit mai multă apă decât aurul, dar mai puțină decât argintul. Este ușor de arătat că, pornind de la volumele diferite de apă dislocuite, se poate calcula raportul dintre greutatea aurului și cea a argintului din coroană. Prin urmare, Arhimede nu a avut nevoie să folosească legile hidrostaticii pentru a rezolva problema coroanei.

59 *a fost citată de:* Într-o scrisoare a lui Thomas Jefferson către M. Correa de Serra din 1814, acesta scria: „Buna-credință a omenirii, aidoma pârghiei lui Arhimede, dacă are un punct de sprijin dat urnește lumea." Lord Byron menționează afirmația lui Arhimede în *Don Juan.* JFK folosește fraza într-un discurs din campania electorală, citat în *The New York Times,* pe 3 noiembrie 1960. Mark Twain o folosește într-un articol intitulat „Arhimede" din 1887.

61 *Arhimede a folosit un sistem de oglinzi:* Un grup de studenți de la MIT a încercat în octombrie 2005 să reproducă arderea unei corăbii folosind oglinzi. Unii dintre ei au repetat experimentul și pentru emisiunea TV *Myth Busters*. Rezultatele au fost neconcludente, căci, deși studenții au obținut o zonă de ardere auto-întreținută, nu au produs o aprindere puternică. Un experiment similar realizat în Germania în septembrie 2002 a reușit să aprindă pânza unei corăbii folosind 500 de oglinzi. O discuție privind oglinzile arzătoare poate fi găsită pe un site web creat de Michael Lahanas.

61 *Potrivit unor relatări:* Exact aceste cuvinte ale lui Arhimede sunt menționate în *Chiliade*; vezi Dijksterhuis 1957. Plutarh spune doar că Arhimede a refuzat să-l urmeze pe soldat la Marcellus înainte de a rezolva problema care îl absorbea (Plutarh cca 75 d. Cr.).

62 *După cum observa matematicianul și istoricul britanic:* Whitehead 1911.

63 *Cecetările lui Arhimede acoperă un spectru:* O superbă carte despre cercetările lui Arhimede este *The Works of Archimedes* (Heath 1897). Vezi și Dijksterhuis 1957 și Hawking 2005.

64 *„Unii cred, rege Gelon":* Heath 1897.

66 *Povestea acestei descoperiri:* Pentru istoria palimpsestului, vezi Netz și Noel 2007.

66 *Cândva în secolul X:* Probabil în 975.

66 *Copistul Ioannes Myronas:* Netz și Noel 2007.

68 *Am avut norocul să întâlnesc:* Will Noel, directorul proiectului, a aranjat o întâlnire cu William Christens-Barry, Roger Easton, și Keith Knox. Această echipă a conceput sistemul de imagistică și a inventat algoritmul folosit pentru a dezvălui o parte din text. Tehnici de procesare a imaginii au fost elaborate și de cercetătorii Anna Tonazzini, Luigi Bedini și Emanuele Salerno.

69 *„Îți voi trimite demonstrațiile":* Dijksterhuis 1957.

71 *a anticipat* calculul diferențial și integral: Berlinski 1996.

72 *Matematicianul grec Geminos:* Heath 1921.

72 *a cerut să-i fie cioplit:* Plutarh cca 75 d. Cr.

73 *Iată o tulburătoare relatare a evenimentului:* Cicero secolul I î. Cr. Pentru o analiză a textului lui Cicero la nivel de structură, retorică și simbolism, vezi Jaeger 2002.

74 *Galileo Galilei se naște la Pisa:* O biografie modernă exhaustivă este *Galileo at Work* de S. Drake (Drake 1978). O lucrare mai accesibilă este *Galileo: A Life* (Reston 1994) de J. Reston. Vezi și Van Helden și Burr 1995. Operele complete ale lui Galilei (în italiană) apar în Favaro 1890–1909.

74 *„Cei care-i citesc scrierile":* În *Mica balanță,* Galilei 1586.

75 *„lemnul se mișcă mai repede":* Galilei 1589–92 (Galilei 1600a și Galilei 1600b). C.B. Schmitt sugerează (Schmitt 1969, după D.A. Maklich) că afirmația lui Galilei poate fi rezultatul faptului că mâna care ține bila de plumb este mai obosită decât cea care ține bila de lemn, prin urmare bila de lemn e eliberată mai repede. O excelentă prezentare a ideilor lui Galilei privind corpurile care cad poate fi găsită în Frova și Marenzana 1998. O superbă prezentare a fizicii lui Galilei poate fi găsită în Koyré 1978.

76 *Viviani a creat imaginea populară:* O descriere completă a metodelor lui Galilei poate fi găsită în Shea 1972 și în Machamer l998.

76 *„era ignorant nu numai":* Galilei 1589–92. Galilei îl critică din plin pe Aristotel în *De motu.* Vezi Galilei 1600a, b.

76 *Virginia, Livia și Vincenzio:* Povestea vieții Virginiei, cunoscută mai târziu ca Sora Maria Celeste, apare în *Galileo's Daughter* de Dava Sobel (Sobel 1999).

78 *„Acum vreo zece luni":* Galilei 1610a, b. O excelentă prezentare a cercetărilor care au condus la telescop poate fi găsită în Reeves 2008.

78 *După cum spunea istoricului științei:* Swerdlow 1998. Pentru o prezentare amănunțită a descoperirilor făcute de Galilei cu telescopul, vezi Shea 1972, Drake 1990.

79 *Îndreptându-și telescopul spre Lună:* O prezentare accesibilă și atrăgătoare a descoperiririlor lui Galilei, precum și o istorie generală a telescopului pot fi găsite în Panek 1998.

80 *Importanța descoperirii:* Copernicanismul lui Galilei este analizat pe larg de Shea 1998 și Swerdlow 1998.
81 *în dispoziție ludică, Galilei îi trimite lui Kepler:* Scrisoarea a fost scrisă pentru ambasadorul toscan la Praga, dar Galilei a inclus o anagramă pentru Kepler.
81 *Kepler a încercat fără succes să descifreze:* De fapt, i-a scris lui Galilei: „Te implor să nu mă lași mult timp pradă îndoielii privind înțelesul. Căci, după cum vezi, ai de-a face cu nemți adevărați. Gândește-te la ce disperare mă aduce tăcerea dumitale.“ Citat în Caspar 1993.
82 *Scheiner susținea că era imposibil:* Întregul episod e relatat în amănunt în Shea 1972.
84 *Poetul scoțian Thomas Seggett:* Epigrama e în latină. Seggett (1570–1627) fusese elevul lui Galilei la Padova. Pentru un eseu despre poezie și telescoape: Nicolson 1935.
84 *Sir Henry Wotton, un diplomat englez:* Curzon 2004.
85 *Aristotelicianul Giorgio Coresio:* Coresio 1612. Citat și în Shea 1972.
85 *filozoful Vincenzo di Grazia din Pisa:* Apare în *Considerazioni* de di Grazia (1612), reprodus în *Opere di Galileo,* vol. 4, p. 385.
86 *În introducerea la tratatul său:* Citat în Shea 1972.
87 *Premisa caracterului imuabil:* Întreaga poveste a controversei asupra naturii petelor solare e prezentată în Van Helden 1996 și în Swerdlow 1998. Vezi și Shea 1972.
88 *Întreaga poveste a lui* Il Saggiatore: Galilei 1623.
89 *ținute de Mario Guiducci, discipol al lui Galilei:* Antonio Favaro, care a editat toate lucrările lui Galilei, a descoperit că o mare parte a manuscrisului lui Guiducci (conținând conferințele) era scrisă de mâna lui Galilei.
89 *„Să acceptăm că maestrul meu“:* Grassi 1619.
90 *„Cred că Sarsi este ferm convins“:* Galilei 1623.
91 Discursuri și demonstrații matematice: Galilei 1638.
93 *fondul obiecției:* excelente analize ale opiniilor lui Galilei despre relația dintre știință și Scripturi pot fi găsite în Feldberg 1995 și în McMullin 1998.
93 *Într-o lungă scrisoare către Castelli:* apare și în von Gebler 1879.
94 *intra evident în contradicție:* Teologul Melchior Cano spunea în 1585 că „nu numai cuvintele, dar și fiecare virgulă [din Scriptură] provine de la Sfântul Duh“. Citat în Vawter 1972.
95 *Încercările ulterioare ale lui Galilei de a face apel:* O prezentare *in extenso* poate fi găsită în Redondi 1998.
95 Dialog despre cele două mari sisteme: Galilei 1632.
95 *„Te condamnăm la închisoarea oficială“:* de Santillana 1955.
96 *„Prin urmare, dorind să înlătur din“:* de Santillana 1955.

98 *„Faptul că Papa“:* Beltrán Mari 1994. Vezi și discuția în Frova și Marenzana 1998.

Capitolul 4. Magicienii: Scepticul și uriașul

pagina

100 *„cel mai măreț pas făcut vreodată“:* Citat în Sedgwick și Tyler 1917.

100 *René Descartes s-a născut pe 31 martie:* Există numeroase biografii ale lui Descartes. Clasică este Baillet 1691. Alte cărți pe care le-am găsit utile sunt Vrooman 1970 și relativ recenta Rodis-Lewis 1998. Bell 1937 este concisă, dar frumoasă. Foarte interesante sunt și Finkel 1898, Watson 2002, și Grayling 2005.

101 *Descartes îl oprește pe primul trecător:* Deși nu încape îndoială că Descartes l-a întâlnit într-adevăr pe Beeckman în acea zi, Beeckman nu menționează în jurnalul său problema de pe tablă. Beeckman spune în schimb că Descartes „a făcut toate eforturile posibile ca să demonstreze că în realitate unghiul nu există“.

101 *a cărui influență asupra studiilor lui Descartes:* Gaukroger 2002.

102 *Descartes are trei vise:* Majoritatea biografilor plasează această noapte în orașul Ulm din statul Neuburg. Descartes însuși povestește întâmplarea într-un carnet pe care l-au văzut primii biografi. Numai câteva pasaje transcrise au supraviețuit. Descartes a reluat în *Discurs* povestea viselor (Adam și Tannery 1897–1910). O prezentare amănunțită a acestor vise și a posibilelor lor interpretări poate fi găsită în Grayling 2005 și Cole 1992.

104 *după cum îi scrie Descartes unui prieten:* Scrisoare către Pierre Chanut, ambasadorul Franței în Suedia, care era și filozof amator. Adam și Tannery 1897–1910.

105 *Descartes a fost înmormântat în Suedia:* A fost inițial înmormântat în cimitirul Nord-Malmoe. Când rămășițele i-au fost aduse în Franța, au existat zvonuri (Adam și Tannery 1897–1910) că o parte, și anume craniul, ar fi rămas în Suedia. În Franța, rămășițele au fost îngropate întâi în Abația Sainte-Geneviève, apoi în mănăstirea Petits-Augustins. În sfârșit, rămășițele au fost depuse în Catedrala Saint-Germain-des-Prés, acolo unde se află azi Capela Saint-Benoît. Am găsit-o cu greu, pentru că nu mi-a venit să cred că Descartes nu era înmormântat singur. De fapt, în aceeași capelă sunt înmormântați doi benedictini, Mabillon și Montfaucon, și există numai bustul lui Mabillon.

106 *Ceea ce-l face pe Descartes cu adevărat modern:* Balz 1952.

106 *Descartes a recunoscut că metodele:* Adam și Tannery 1897–1910. Majoritatea citatelor mele provin din această sursă. Există numeroase

traduceri ale lucrărilor individuale, precum *The Philosophy of Descartes* (Veitch 1901), care conține *Discurs despre metodă, Meditațiile* și *Principiile filozofiei.* Despre filozofia științei la Descartes, vezi și Clarke 1992.

107 *acest potop de îndoieli tulburătoare:* O excelentă introducere în filozofia lui Descartes poate fi găsită în Cottingham 1986. Vezi de asemenea Wolterstorff 1999, Ricoeur 1996, Sorell 2005, Curley 1993, și Beyssade 1993.

108 *El a schițat-o într-o anexă de 106 pagini:* Descartes 1637. Ediția P.J. Olscamp din 1965 conține întreaga carte (Descartes 1637a). O frumoasă traducere a *Geometriei*, care include și un facsimil al primei ediții, este *The Geometry of René Descartes* (tradusă de D.E. Smith și M.L. Latham; Descartes 1637b).

110 *Descartes a descoperit o cale de a reprezenta:* Rouse Ball 1908. O frumoasă și accesibilă prezentare a vieții și operei lui Descartes poate fi găsită în Aczel 2005. Nivelul de abstracție al algebrei lui Descartes e analizat în Gaukroger 1992.

112 *scriind tratatul de cosmologie și fizică:* credința lui Descartes în existența „legilor naturii" se vede și într-o scrisoare către Mersenne din mai 1632: „Am devenit suficient de îndrăzneț pentru a căuta cauza poziției fiecărei stele fixe. Căci, deși distribuția lor pare neregulată, nu mă îndoiesc că se supun unei ordini naturale care e regulată și determinată."

113 *Două dintre legile sale se apropie mult:* Adam și Tannery 1897–1910. Vezi și Miller și Miller 1983. O bună prezentare a fizicii lui Descartes poate fi găsită în Garber 1992. O descriere mai generală a filozofiei naturale a lui Descartes apare în Keeling 1968.

116 *mormântul lui Newton din Catedrala Westminster*: Monumentul a fost ridicat în 1731. El i-a fost comandat lui William Kent și sculptorului flamand Michael Rysbrack. În plus față de figura lui Newton, care se sprijină pe unele dintre lucrările sale, sculptura înfățișează tineri purtând embleme ale principalelor descoperiri ale lui Newton. În spatele sarcofagului se află o piramidă, din mijlocul căreia se înalță un glob pe care sunt desenate mai multe constelații, precum și traiectoria cometei din 1681.

117 *De fapt, Newton a scris probabil:* Este imposibil de știut cu certitudine dacă Newton a avut sau nu intenția să fie o insultă. R.K. Merton a descoperit că „pe umerii unor uriași" era o expresie destul de răspândită pe vremea lui Newton (Merton 1993).

117 *În răspunsul său la scrisoarea Hooke:* Întreaga corespondență a lui Newton este adunată în Turnbull, Scott, Hall și Tilling 1959–77.

117 *Vrajba dintre cei doi oameni de știință:* Vezi biografiile lui Newton, între care Westfall 1983, Hall 1992, și Gleick 2003.

118 *nu păreau decât o colecție:* Într-un text publicat în 1674, Hooke scrie despre gravitație că „puterea sa atractivă este cu atât mai mare cu cât este mai aproape de centrul ei corpul asupra căruia acționează". Astfel, deși a avut intuiția corectă, nu e reușit s-o descrie matematic.

118 *„Prezentăm această lucrare drept principiile matematice":* Există mai multe traduceri excelente ale *Principiilor* lui Newton, între care Motte 1729 și Cohen și Whitman 1999 (vezi Newton 1729). Cea mai accesibilă este versiunea revizuită a lui Chandrasekhar din 1995. Ideea generală de lege a gravitației și istoria ei sunt prezentate pe larg în Girifalco 2008, Greene 2004, Hawking 2007 și Penrose 2004.

119 *chiar și în cartea sa despre lumină:* Newton 1730.

120 *În* Memoirs of Sir Isaac Newton's Life: Stukeley 1752. În plus față de biografiile complete există cărți care prezintă episoade din viața lui Newton sau a apropiaților săi. Între ele, De Morgan 1885 și Craig 1946.

121 *Indiferent dacă miticul eveniment:* În biografia închinată lui Newton, David Brewster scrie în 1831: „Celebrul pom, din care se spune că a căzut un măr care i-a atras atenția lui Newton asupra gravitației, a fost distrus de vânt acum vreo patru ani, dar dl. Tumor [proprietarul casei lui Newton din Woolsthorpe] l-a păstrat sub forma unui scaun." Brewster 1831.

121 *Poate că totul a început în tinerețea lui Newton:* O bună prezentare a studiilor de matematică ale lui Newton se găsește în Hall 1992.

122 *„În același an [1666] am început":* Nota se află în Colecția Portsmouth. Există alte documente care sugerează că Newton s-a gândit într-adevăr la legea proporțională cu inversul pătratului în timpul anilor de ciumă. Vezi Whiston 1753, de exemplu.

123 *Din motive nu tocmai limpezi:* Pentru întârzierea anunțului legii newtoniene a gravitației, vezi Cajori 1928 și Cohen 1982. În următoarea secțiune, prezint două explicații pe care le consider cele mai convingătoare.

124 *„În 1684 Dr Halley a venit":* De Moivre își amintește aici ceea ce îi povestise Newton.

126 *Unii au lansat chiar ipoteza:* Acest lucru e sugerat, de pildă, de Cohen 1982.

127 *cu ocazia sărbătoririi bicentenarului:* Glaisher 1888.

130 *Pentru Newton, însăși existența lumii:* În *Principia* spune despre Dumnezeu: „Este omniprezent nu numai *în principiu*, dar și *în mod efectiv*... Este numai ochi, urechi, creier, forță de simțire, de înțelegere și de acțiune." Într-un manuscris de pe la 1700, achiziționat la Sotheby

în 1936 și expus la Ierusalim în 2007, Newton folosește Cartea lui Daniel pentru a calcula data Apocalipsei. Dacă sunteți cumva îngrijorați, aflați că nu există nici un motiv ca „[lumea] să sfârșească înainte de“ 2060.

130 *Validitatea argumentelor cosmologic, teologic:* Vezi Dennett 2006, Dawkins 2006 și Paulos 2008.

132 *Acest gen de manevră logică:* Vezi Dennett 2006, Dawkins 2006, Paulos 2008.

Capitolul 5. Statisticienii și probabiliștii: Știința incertitudinii

pagina

134 *Ramura matematicii numită* calcul infinitezimal: Prezentări accesibile ale calculului infinitezimal pot fi găsite în Berlinski 1996, Kline 1967 și Bell 1951. Mai tehnică, dar excelentă, este Kline 1972.

135 *membrii legendarei familii Bernoulli:* Pentru unele dintre realizările acestei remarcabile familii, vezi Maor 1994, Dunham 1994. Vezi și „Bernoulli-Edition“ (în germană) pe pagina de web a Universității din Basel (http://www.ub.unibas.ch/spez/bernoulli.htm). Informații în engleză despre proiect pot fi găsite la adresa http://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/bernoulli2005web.Pdf ?SGWID=0-0-45-169442-0

135 *pentru dușmăniile din familie:* Hellman 2006.

135 *problema catenarei*: O excelentă prezentare a problemei, în particular a soluției lui Huygens, poate fi găsită în Bukowski 2008. Soluțiile lui Bernoulli, Leibniz și Huygens apar în Truesdell 1960.

136 *„Spui că fratele meu a propus“:* Citat în Truesdell 1960.

138 *Încercare filozofică asupra probabilităților*: Laplace 1814 (traducere de Truscot și Emory din 1902).

142 *John Graunt (1620–1674) se pregătise:* Excelente prezentări ale vieții și operei lui Graunt pot fi găsite în Hald 1990, Cohen 2006 și Graunt 1662.

145 *lucrarea lui Halley, purtând titlul cam lung:* Lucrarea este reprodusă în Newman 1956.

147 *Iată cum prezintă Jakob Bernoulli:* Citat în Newman 1956. Cercetările sale sunt rezumate în Todhunter 1865.

148 *Adolphe Quetelet s-a născut:* Două excelente cărți despre Quetelet și opera sa sunt Hankins 1908 și Lottin 1912. Vezi de asemenea Stigler 1997, Krüger 1987 și Cohen 2006.

149 *„Șansa, acest cuvânt misterios“:* Quetelet 1828.

151 *era un tip pe care natura:* Quetelet a scris în memoriul său asupra înclinației către crimă: „Dacă omul mediu ar fi determinat pentru o națiune, el ar reprezenta tipul acelei națiuni; dacă ar putea fi determinat din totalitatea oamenilor, el ar reprezenta tipul întregii rase umane."
153 *Cel care a introdus conceptul:* Pentru o prezentare accesibilă a operei lui Galton și Pearson, vezi Kaplan și Kaplan 2006.
155 *Studiul serios al probabilităților:* Vezi Aczel 2004, Kaplan și Kaplan 2006, Connor 2006, Burger și Starbird 2005 și Tabak 2004.
155 *într-o scrisoare datată 29 iulie 1654:* Todhunter 1865, Hald 1990.
156 *Esența teoriei probabilităților:* O excelentă, accesibilă și scurtă prezentare a unora dintre principiile esențiale ale teoriei probabilităților poate fi găsită în Kline 1967.
156 *Teoria probabilităților ne oferă informații precise:* Pertinența teoriei probabilităților în numeroase situații din viața reală e excelent prezentată în Rosenthal 2006.
158 *Cel care a introdus probabilitățile:* pentru o excelentă biografie, vezi Orel 1996.
160 *Mendel a publicat articolul:* Mendel 1865. O traducere în engleză poate fi găsită pe pagina web creată de R.B. Blumberg la adresa http://www.mendelweb.org
160 *Deși există anumite îndoieli legate de precizia:* Vezi Fisher 1936, de exemplu.
160 *marele statistician britanic:* Pentru o scurtă prezentare a unora dintre cercetările sale, vezi Tabak 2004. Fisher a scris un articol extrem de original și accesibil despre planificarea experimentelor, intitulat „Mathematics of a Lady Tasting Tea" (vezi Fisher 1956).
162 *în cartea sa* Ars Conjectandi: Vezi Bernoulli 1713b.
164 *El explică apoi:* Reprodus în Newman 1956.
165 *Shaw a scris un articol:* Articolul „The Vice of Gambling and the Virtue of Insurance" apare în Newman 1956.
167 *Într-o broșură intitulată* Analistul: Broșura a fost scrisă de George Berkeley în 1734. O versiune revizuită de David Wilkins este menționată pe web; vezi Berkeley 1734.

Capitolul 6. Geometrii: Șocul viitorului

pagina

168 *În celebra sa carte* Șocul viitorului: Toffler 1970.
169 *Hume identifică două tipuri:* Hume 1748.
170 *Kant s-a întrebat nu ce putem ști:* Potrivit lui Kant, una dintre sarcinile fundamentale ale filozofiei este de a da seamă de posibilitatea unei

cunoașteri sintetice a priori a conceptelor matematice. Vezi, de pildă, Hoffe 1994 și Kuehn 2001, pentru conceptele generale, și Trudeau 1987.

170 *„Spațiul nu este un concept":* Kant 1781.

171 *Primele patru axiome euclidiene:* Pentru o introducere în geometria euclidiană și în cele neeuclidiene, vezi Greenberg 1974.

171 *demonstrațiile primelor douăzeci și opt:* teoremele demonstrate fără cel de-al cincilea postulat sunt discutate în Trudeau 1987.

172 *Unele dintre aceste tentative:* O excelentă prezentare a tuturor încercărilor care au condus în cele din urmă la apariția geometriei neeuclidiene poate fi găsită în Bonola 1955.

174 *Primul care a publicat un întreg tratat:* Traducerea lui George Bruce Halsted din 1891 a tratatului lui Lobachevski, „Geometrical Researches on the Theory of Parallels", apare în Bonola 1955.

174 *tânărul matematician maghiar János Bolyai:* Pentru o biografie și o prezentare a operei sale, vezi Gray 2004. Nu am inclus aici un portret al lui János Bolyai pentru că tabloul folosit de obicei este de autenticitate îndoielnică. Se pare că singurul său portret autentic este un bazorelief pe fațada Palatului Culturii din Marosvásárhely (Târgu Mureș).

175 *Manuscrisul se intitula:* Știința absolută a spațiului: Un facsimil al originalului (în latină) și traducerea în engleză a lui George Bruce Halsted apar în Gray 2004.

177 *Nu încape îndoială că Gauss:* O excelentă prezentare a întregului episod, din perspectiva vieții și operei lui Gauss, poate fi găsită în Dunnington 1955. Vezi de asemenea Kline 1972. O parte din corespondența lui Gauss privind geometria neeuclidiană e prezentată de Ewald 1996.

178 *Într-o strălucită conferință ținută la Göttingen:* O traducere în engleză a conferinței, precum și a articolelor despre geometriile neeuclidiene poate fi găsită în Pesic 2007.

181 *Perspectiva lui Poincaré:* Poincaré 1891.

183 *în primul capitol din* Ars Magna: Cardano 1545.

184 *o altă lucrare importantă,* Treatise of Algebra: Wallis 1685. Pentru biografia și opera lui Wallis, vezi Rouse Ball 1908.

184 *opiniile au început să se schimbe:* Un rezumat poate fi găsit în Cajori 1926.

185 *Într-un articol intitulat „Dimensiune":* Acest articol a apărut în *Enciclopedia* lui Diderot. Citat în Archibald 1914.

185 *afirmând în 1797:* Lagrange 1797.

185 *Provenind dintr-o familie cu doisprezece copii:* O excelentă biografie și prezentare a operei lui Grassmann (în germană) poate fi găsită în Petsche 2006. Vezi și O'Connor și Robertson 2005.

186 *Este fascinant de urmărit:* Prezentări accesibile (dar tehnice) ale studiilor sale de algebră liniară pot fi găsite în Fearnley-Sander 1979 și 1982.
187 Pe la *1860, geometria în n dimensiuni:* O bună introducere este Sommerville 1929.
188 *prin următoarea "declarație de independență":* Textul apare în Ewald 1996.
188 *La care algebristul Richard Dedekind:* Textul apare în Ewald 1996.
189 *Iată ce spunea matematicianul francez:* Prima scrisoare a lui Stieltjer către Hermite este datată 8 noiembrie 1882. Corespondența dintre cei doi matematicieni constă în 432 de scrisori. Întreaga corespondență apare în Hermite 1905. Traducerea de aici îmi aparține.
189 *„Matematicienii au construit":* Conferința poate fi găsită în O'Connor și Robertson 2007.

Capitolul 7. Logicienii: Reflecție asupra raționamentului

pagina
191 *În anunțul din fața unei frizerii:* Paradoxul frizerului satulei e discutat în multe cărți. Vezi Quine 1966, Rescher 2001 și Sorensen 2003, de exemplu.
191 *Iată cum prezintă Russell:* Russell 1919. Aceasta e cea mai cunoscută expunere a ideilor sale din logică.
192 *Pentru a da o imagine completă:* Programul intuiționist al lui Brouwer este bine rezumat de van Stegt 1998. O excelentă expunere accesibilă apare în Barrow 1992. Disputa dintre formalism și intuiționism este prezentată în Hellman 2006.
193 *sensul unei afirmații matematice:* Dummett adaugă: „Un individ nu poate comunica un lucru pe care nu poate fi observat că îl comunică: dacă un individ a asociat un anumit conținut mental cu un simbol sau cu o formulă matematică, iar asocierea nu constă în folosirea simbolului sau a formulei, atunci el nu poate transfera conținutul cu ajutorul simbolului sau formulei, căci publicul nu-și dă seama de asociație și n-are cum să-și dea seama." Dummett 1978.
193 *logica se ocupa cu relațiile:* O introducere extrem de accesibilă poate fi găsită în Bennett 2004. Mai tehnică, dar excelentă, este Quine 1982. Un frumos rezumat al istoriei logicii de Czeslaw Lejewski apare în *Encyclopaedia Britannica.*
195 *De Morgan a fost extrem de prolific:* O prezentare concisă, dar pătrunzătoare, a vieții și operei sale e dată în Ewald 1996.
197 *povestea mai târziu în* Analiza matematică a logicii: Boole 1847.

197 *George Boole s-a născut:* Pentru o biografie completă, vezi MacHale 1985.

199 *„Scopul tratatului":* Boole 1854.

202 *În ciuda soliditătii concluziei lui Boole:* Boole a conchis că, atunci când e vorba de credința în existența lui Dumnezeu, „pașii șovăielnici ai unei înțelegeri limitate în facultățile sale și în materia cunoașterii sale sunt mai de folos decât încercarea ambițioasă de a ajunge la certitudine pe baza religiei naturale".

203 *Frege reușește să publice:* Frege 1879. Aceasta este una dintre cele mai importante lucrări din istoria logicii.

204 *În* Legile fundamentale ale aritmeticii: Frege 1893, 1903.

204 *Axiomele logice ale lui Frege:* Pentru o discuție generală privind ideile și formalismul lui Frege, vezi Resnick 1980, Demopoulos și Clark 2005, Zalta 2005 și 2007 și Boolos 1985. Pentru prezentarea generală a logicii matematice, vezi DeLong 1970.

205 *A continuat apoi definind toate numerele naturale:* Frege 1884.

208 *„tuturor mulțimilor care nu sunt membre":* Paradoxul lui Russell și consecințele sale, precum și posibilele soluții sunt discutate, de pildă, în Boolos 1999, Clark 2002, Sainsbury 1988 și Irvine 2003.

209 *cele trei volume din* Principia Mathematica: Whitehead și Russell 1910. Pentru o prezentare accesibilă a *Principiilor*, vezi Russell 1919.

209 *În* Principia, *Russell și Whitehead:* Pentru ciocnirea dintre ideile lui Frege și cele ale lui Russell, vezi Beaney 2003. Pentru logicismul lui Russell, vezi Shapiro 2000, și Godwyn și Irvine 2003.

210 *Russell a propus o* teorie a tipurilor: Vezi Urquhart 2003.

211 *Teoria tipurilor propusă de Russell:* Teoria tipurilor a decăzut într-adevăr din grațiile majorității matematicienilor. Un construct similar și-a găsit totuși aplicații în programare. Vezi Mitchell 1990, de exemplu.

212 *matematicianul german Ernst Zermelo:* Vezi Ewald 1996 pentru o prezentare a contribuțiilor sale.

212 *Schema lui Zermelo a fost dezvoltată:* Traduceri ale lucrărilor originale ale lui Zermelo, Fraenkel și ale logicianului Thoralf Skolem pot fi găsite în van Heijenoort 1967. Pentru o relativ accesibilă introducere în mulțimi și axiomele lui Zermelo-Fraenkel, vezi Devlin 1993.

212 *axioma alegerii afirmă*: O foarte amănunțită analiză a axiomei poate fi găsită în Moore 1982.

213 *cunoscută drept* ipoteza continuumului: Cantor a dedus o metodă pentru a compara cardinalele mulțimilor infinite. În particular, a demonstrat că mulțimea numerelor reale are un cardinal mai mare decât mulțimea numerelor întregi. A formulat apoi ipoteza continuumului, care afirma că nu există nici o mulțime al cărei cardinal să fie strict cuprins între cel al numerelor întregi și cel al numerelor reale. Atunci când David

Hilbert a enunțat celebrele sale probleme de matematică în 1900, întrebarea dacă ipoteza continuumului era adevărată a fost prima sa problemă. Vezi Woodin 2001a, b.

213 *datorate matematicianului american Paul Cohen:* și-a prezentat cercetările în Cohen 1966.

214 *Pentru el, matematica însemna pur și simplu:* O bună prezentare a programului lui Hilbert poate fi găsită în Sieg 1988. Vezi de asemenea Shapiro 2000.

215 *„Cercetările mele privind noile fundamente":* Hilbert a ținut această conferință la Leipzig, în septembrie 1922. Textul poate fi găsit în Ewald 1996.

215 *pentru adepții săi formaliști:* Vezi Detlefsen 2005.

215 *considerat de unii drept cel mai mare:* R. Monk a scris o excelentă biografie (Monk 1990).

216 *„Dacă nu mi-e limpede care e natura":* În Waismann 1979.

216 *Kurt Gödel s-a născut:* O recentă biografie este Goldstein 2005. Biografia standard era Dawson 1997.

217 *publica* teoremele de incompletitudine: Pentru teoremele lui Gödel, semnificația lor și legăturile cu alte ramuri ale cunoașterii, vezi Hofstadter 1979, Nagel și Newman 1959 și Franzen 2005.

218 *„Dar, în pofida depărtării":* Gödel 1947.

218 *Omul Gödel era la fel de complex:* Pentru perspectiva filozofică a lui Gödel, vezi Wang 1996.

219 *„În 1946, Gödel a făcut cerere":* Morgenstern 1971.

223 *Acum, tot ce exista era un „joc" formal:* Evident, e o simplificare excesivă, permisă numai într-un text de popularizare. De fapt, încercări serioase în logicism continuă și azi. De regulă, ele presupun că multe adevăruri matematice pot fi cunoscute a priori. Vezi Wright 1997 și Tennant 1997, de exemplu.

Capitolul 8. Eficacitate imprevizibilă?

pagina

225 *Diverselor noduri li s-au dat:* O carte interesantă despre cum se fac nodurile este Ashley 1944.

225 *Teoria matematică a nodurilor:* Vandermonde 1771. Un excelent rezumat al istoriei teoriei nodurilor poate fi găsit în Przytycki 1992. Pentru teorie, vezi Adams 1994. Cărți accesibile sunt Neuwirth 1979, Peterson 1988, și Menasco și Rudolph 1995.

226 *Eforturile lui Thomson s-au concentrat:* Vezi Sossinsky 2002 și Atiyah 1990.

228 *Tait a ales calea grea:* Tait 1898, Sossinsky 2002. O scurtă biografie a lui Tait poate fi găsită în O'Connor și Robertson 2003.
229 *Maxwell i-a dedicat următorul catren:* Knott 1911.
229 *profesorul Charles Newton Little:* Little 1899.
230 *Topologia – geometria foii de cauciuc:* O introducere tehică, dar elementară în topologie este oferită în Messer și Straffin 2006.
230 *avocatul și matematicianul newyorkez:* Perko 1974.
231 *Un progres în teoria nodurilor a fost făcut:* Alexander 1928.
232 *prolificul matematician anglo-american:* Conway 1970.
232 *Examinarea relației a dezvăluit până la urmă:* Jones 1985.
234 *asupra unui spectru larg de discipline științifice:* De pildă, matematicianul Louis Kauffman a demonstrat o relație între polinomul Jones și fizica statistică. O carte excelentă, dar tehnică, despre aplicațiile în fizică este Kauffman 2001.
235 *Agenții care se ocupă:* O excelentă descriere a teoriei nodurilor și a acțiunii enzimelor este dată în Summers 1995. Vezi și Wasserman și Cozzarelli 1986.
238 *Teoria corzilor pare a fi:* Vezi Greene 1999, Randall 2005, Krauss 2005 și Smolin 2006. Pentru o introducere tehnică, vezi Zweibach 2004.
238 *specialiștii în teoria corzilor Hirosi Ooguri și Cumrun Vafa:* Ooguri și Vafa 2000.
239 *au descoperit o legătură surprinzătoare:* Witten 1989.
239 *regândit din perspectivă pur matematică:* Atiyah 1989; vezi Atiyah 1990 pentru o perspectivă mai largă.
240 *Eric Adelberger, Daniel Kapner și colaboratorii lor:* Kapner *et al.* 2007.
241 *Einstein avea un motiv foarte puternic:* Există numeroase expuneri ale ideilor relativității speciale și generale. Voi menționa aici doar câteva care mi-au plăcut în mod special: Davies 2001, Deutsch 1997, Ferris 1997, Gott 2001, Greene 2004, Hawking și Penrose 1996, Kaku 2004, Penrose 2004, Rees 1997 și Smolin 2001. O recentă și minunată prezentare a omului Einstein și a ideilor sale apare în Isaacson 2007. Alte cărți despre Einstein și lumea sa sunt Bodanis 2000, Lightman 1993, Overbye 2000 și Pais 1982. Pentru o frumoasă colecție de articole originale, vezi Hawking 2007. [Vezi, de asemenea, Jeremy Bernstein, *Albert Einstein și frontierele fizicii*, Editura Humanitas, București, 2011.]
245 *Cel mai recent test a fost rezultatul:* Kramer *et al.* 2006.
246 *un grup de fizicieni de la Universitatea Harvard:* Odom *et al.* 2006.
246 *La sfârșitul anilor 1960, fizicienii:* o excelentă prezentare poate fi găsită în Weinberg 1993.

Capitolul 9. Despre mintea umană, matematică și univers

pagina

248 *Iată ce spun:* Davis și Hersh 1981.

249 *reprezentând punctul de vedere platonician:* Hardy 1940.

249 *susțin exact părerea opusă:* Kasner și Newman 1989.

251 *Cei care cred că matematica există:* Una dintre cele mai bune cărți de popularizare despre natura matematicii este Barrow 1992. O carte ceva mai tehnică, dar accesibilă, este Kline 1972.

251 *Am vorbit deja despre:* Vezi de asemenea Barrow 1992.

251 *Tegmark susține că:* Tegmark 2007a, b.

252 *ca răspuns la o afirmație asemănătoare:* Changeux și Connes 1995.

253 *În cartea sa din 1997:* Dehaene 1997.

253 *Dehaene și colaboratorii săi:* Dehaene *et al.* 2006.

253 *Nu toți cognitiviștii:* Vezi Holden 2006, de exemplu.

254 *face următoarea observație:* Changeux și Connes 1995.

254 *cea mai categorică opinie:* Lakoff și Núñez 2000.

255 *Neurologii au identificat:* Vezi Ramachandran și Blakeslee 1999, de pildă.

255 *Neurologul Rosemary Varley:* Varley *et al.* 2005; Klessinger *et al.* 2007.

256 *Să ne întoarcem la Atiyah:* Atiyah 1995.

257 *Din secolul XIX:* Pentru o prezentare amănunțită a secțiunii de aur, a istoriei și proprietăților ei, vezi Livio 2002 și Herz-Fischler 1998.

261 *Numerele prime, în calitate de* concept: Vezi articolul luiYehuda Rav din Hersh 2000.

262 *Antropologul Leslie A. White:* White 1947.

263 *a atras atenția prin anii 1960 asupra faptului:* Vezi Hockett 1960.

263 *Prima proprietate reprezintă capacitatea:* Vezi Obler și Gjerlow 1999.

263 *sunt caracteristice și matematicii:* Asemănările dintre limbaj și matematică sunt discutate în Sarrukai 2005 și Atiyah 1994.

263 *Noam Chomsky și-a publicat celebrele sale:* Chomsky 1957. Mai multe despre lingvistică se găsesc în Aronoff și Rees-Miller 2001. O interesantă carte de popularizare este Pinker 1994.

264 *Informaticianul Stephen Wolfram susține:* Wolfram 2002.

265 *Astrofizicianul Max Tegmark susține:* Tegmark a identificat patru tipuri distincte de universuri paralele. La „nivelul I“ sunt universurile cu aceleași legi ale fizicii, dar cu condiții inițiale diferite. La „nivelul II“ sunt universurile cu aceleași ecuații ale fizicii, dar, poate, cu constante diferite ale naturii. „Nivelul III“ presupune interpretarea mecanicii cuantice din perspectiva „mai multor lumi“, iar la „nivelul IV“ există structuri matematice diferite. Tegmark 2004, 2007b.

266 *ceea ce se numește* principiul mediocrității: Vezi Vilenkin 2006.

266 *adoptă o poziție intermediară numită* realism: Putnam 1975.

266 *Îngăduiți-mi întâi să trec repede în revistă:* Există și alte opinii pe care nu le prezint aici. De pildă, Steiner (2005) susține că Wigner nu arată că exemplul pe care îl dă pentru „imprevizibila eficacitate“ nu se leagă de faptul că e vorba de concepte matematice.

266 *David Gross, laureat al Premiului Nobel pentru fizică, scrie:* Gross 1988. Pentru o prezentare mai amplă a relației dintre matematică și fizică, vezi Vafa 2000.

267 *Sir Michael Atiyah, a cărui perspectivă:* Atiyah 1995; vezi și Atiyah 1993.

268 *Matematicianul și informaticianul american Richard Hamming:* Hamming 1980.

269 *O interpretare asemănătoare a fost propusă:* Weinberg 1993.

269 *l-aș putea cita pe:* În Borovik 2006.

270 *Raskin conchide că:* Raskin 1998.

271 *Hersh a propus ca, în spiritul:* Vezi Hersh 2000.

274 *Kepler a folosit un uriaș corp de date:* Cărțile lui Kepler (Kepler 1981 și 1997) sunt o interesantă lectură pentru istoria științei. Ca biografii, vezi Caspar 1993 și Gingerich 1973.

275 *orbitele planetelor pot deveni în cele din urmă:* Vezi Lecar *et al.* 2001.

276 *Răspunsul e de fapt mai simplu:* O interesantă prezentare a utilității matematicii apare în Raymond 2005. Vezi de asemenea Wilczek 2006, 2007.

277 Problemele filozofiei de *Bertrand Russell*: Russell 1912.

Bibliografie

Aczel, 2000. *The Mystery of the Aleph: Mathematics, the Kabbalah, and the Search for Infinity* (New York: Four Walls Eight Windows).

— . 2004. *Chance: A Guide to Gambling, Love, the Stock Market, and Just about Everything Else* (New York: Thunder's Mouth Press).

— . 2005. *Descartes' Secret Notebook* (New York: Broadway Books).

Adam, C şi Tannery, P., editori. 1897–1910. *Oeuvres des Descartes.* Ediție revăzută 1964–76 (Paris: Vrin/CNRS). Cea mai cuprinzătoare traducere în engleză este Cottingham, J., Stoothoff, R. şi Murdoch, D., editori. 1985. *The Philosophical Writing of Descartes* (Cambridge: Cambridge University Press).

Adams, C. 1994. *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots* (New York: W.H. Freeman).

Alexander, J.W. 1928. *Transactions of the American Mathematical Society,* 30, 275.

Applegate, D.L., Bixby, R.E., Chvátal, V. şi Cook, W.J. 2007. *The Traveling Salesman Problem* (Princeton: Princeton University Press).

Archibald, R.C. 1914. *American Mathematical Society Bulletin,* 20, 409.

Aristotel. cca 350 î. Cr. *Metaphysics*. În Barnes, J., editor 1984. *The Complete Works of Aristotle* (Princeton: Princeton University Press).

— . cca 330 î. Cr. a. *Physics.* Traducere de R.P. Hardie şi R.K. Gaye. http://people.bu.edu/wwildman/WeirdWildWeb/courses/wphil/readings/wphil_rdg07_physics_entire.htm (traducere în engleză din domeniul public).

— . cca 330 î. Cr. b. *Physics.* Traducere de P.H. Wickstead şi F.M. Cornford, 1960 (Londra: Heinemann).

Aronoff, M. şi Rees-Miller, J. 2001. *The Handbook of Linguistics* (Oxford: Blackwell Publishing).

Ashley, C.W. 1944. *The Ashley Book of Knots* (New York: Doubleday).

Atiyah, M. 1989. *Publications Mathématiques de I'Inst. des Hautes Etudes Scientifiques,* Paris, 68, 175.
— . 1990. *The Geometry and Physics of Knots* (Cambridge: Cambridge University Press).
— . 1993. *Proceedings of the American Philosophical Society,* 137(4), 517.
— . 1994. *Supplement to Royal Society News,* 7, (12), (i).
— . 1995. *Times Higher Education Supplement,* 29 Septembrie.
Baillet, A. 1691. *La Vie de M. Des-Cartes* (Paris: Daniel Horthemels). Facsimilele au fost publicate în 1972 (Hildesheim: Olms) și 1987 (New York: Garner).
Balz, A.G.A. 1952. *Descartes and the Modern Mind* (New Haven: Yale University Press).
Barrow, J.D. 1992. *Pi in the Sky: Counting, Thinking, and Being* (Oxford: Clarendon Press).
— . 2005. *The Infinite Book: A Short Guide to the Boundless, Timeless and Endless* (New York: Pantheon). (Ediția românească: Barrow, *Cartea infinitului*, Humanitas, București, 2009.)
Beaney, M. 2003. În Griffin, N., editor *The Cambridge Companion to Bertrand Russell* (Cambridge: Cambridge University Press).
Bell, E.T. 1937. *Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré* (New York: Touchstone).
— . 1940. *The Development of Mathematics* (New York: McGraw-Hill).
— . 1951. *Mathematics: Queen and Servant of Science* (New York: McGraw-Hill).
Beltrán Mari, A. 1994. „Introduction." În Galilei, G. *Diálogo Sobre los Dos Máximos Sistemas del Mundo* (Madrid: Alianza Editorial).
Bennett, D. 2004. *Logic Made Easy: How to Know When Language Deceives You* (New York: W.W. Norton).
Berkeley, G. 1734. „The Analyst: Or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician", D.R. Wilkins, ed. http:///www.maths.tcd.ie/pub/ HistMath/ People/Berkeley/Analyst/Analyst.html
Berlinski, D. 1996. *A Tour of the Calculus* (New York: Pantheon Books).
Bernoulli, J. 1713a, *The Art of Conjecturing* [*Ars Conjectandi*]. Traducere de E.D. Sylla, cu introducere și note, 2006 (Baltimore: Johns Hopkins University Press).
— . 1713b. *Ars Conjectandi* (Basel: Tharnisiorum).
Beyssade, M. 1993. „The Cogito." În Voss, S., editor, *Essays on the Philosophy and Science of René Descartes* (Oxford: Oxford University Press).
Black, F. și Scholes, M. 1973. *Journal of Political Economy,* 81(3), 637.
Bodanis, D. 2000. $E = mc^2$*: A Biography of the World's Most Famous Equation* (New York: Walker).

Bonola, R. 1955. *Non-Euclidean Geometry.* Traducere de H.S. Carshaw (New York: Dover Publications). Aceasta este reeditarea traducerii din 1912 (Chicago: Open Court Publishing Company).

Boole, G. 1847. *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*. În Ewald, W. 1996. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (Oxford: Clarendon Press).

— . 1854. *An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (London: Macmillan). Retipărit 1958 (Mineola, N.Y.: Dover Publications).

Boolos, G. 1985. *Mind,* 94, 331.

— . 1999. *Logic, Logic, Logic* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Borovik, A. 2006. *Mathematics under the Microscope.* http://www.maths.manchester.ac.uk/%7Eavb/micromathematics/downloads

Brewster, D. 1831. *The Life of Sir Isaac Newton* (Londra: John Murray, Albemarle Street).

Bukowski, J. 2008. *The College Mathematics Journal,* 39(1), 2.

Burger, E.B. şi Starbird, M. 2005. *Coincidences, Chaos, and All That Math Jazz: Making Light of Weighty Ideas* (New York: W.W. Norton).

Burkert, W. 1972. *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Cajori, F. 1926. *The American Mathematical Monthly,* 33(8), 397.

— . 1928. În The History of Science Society. *Sir Isaac Newton 1727–1927: A Bicentenary Evaluation of His Work* (Baltimore: The Williams & Wilkins Company).

Cardano, G. 1545. *Artis Magnae, sive de regulis algebraices.* Publicat în 1968 sub titlul *The Great Art or the Rules of Algebra,* traducere de T.R. Witmer (Cambridge, Mass.: MIT Press).

Caspar, M. 1993. *Kepler.* Traducere de C.D. Hellman (Mineola, N.Y.: Dover Publications).

Chandrasekhar, S. 1995. *Newton's „Principia" for the Common Reader* (Oxford: Clarendon Press).

Changeux, J.-P. şi Connes, A. 1995. *Conversations on Mind, Matter, and Mathematics* (Princeton: Princeton University Press).

Cherniss, H. 1945. *The Riddle of the Early Academy* (Berkeley: University of California Press). Retipărit 1980 (New York: Garland).

— . 1951. *Review of Metaphysics,* 4, 395.

Chomsky, N. 1957. *Syntactic Structures* (The Hague: Mouton & Co.).

Cicero secolul I î. Cr. *Discussion at Tusculam* [tradus uneori ca *Tusculan Disputations*]. În Grant, M., traducere 1971. *Cicero: On the Good Life* (Londra: Penguin Classics).

Clark, M. 2002. *Paradoxes from A to Z* (Londra: Routledge).

Clarke, D.M. 1992. În Cottingham, J., editor *The Cambridge Companion to Descartes* (Cambridge: Cambridge University Press).
Cohen, I.B. 1982. În Bechler, Z., editor *Contemporary Newtonian Research* (Dordrecht: Reidel).
— . 2006. *The Triumph of Numbers* (New York: W.W. Norton & Company).
Cohen, P.J. 1966. *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (New York: W.A. Benjamin).
Cole, J. R. 1992. *The Olympian Dreams and Youthful Rebellion of René Descartes* (Champaign University of Illinois Press).
Connor, J.A. 2006. *Pascal's Wager: The Man Who Played Dice with God* (New York: HarperCollins).
Conway, J.H. 1970. În Leech, J., ed. *Computational Problems in Abstract Algebra* (Oxford: Pergamon Press).
Coresio, G. 1612. *Operetta intorno al galleggiare de' corpi solidi.* Retipărit în Favaro, A. 1968. *Le Opere di Galileo Galilei.* Edizione Nazionale (Florența: Barbera).
Cottingham, J. 1986. *Descartes* (Oxford: Blackwell).
Craig, Sir J. 1946. *Newton at the Mint* (Cambridge: Cambridge University Press).
Curley, E. 1993. În Voss, S., ed. *Essays on the Philosophy and Science of René Descartes* (Oxford: Oxford University Press).
Curzon, G. 2004. *Wotton and His Words: Spying, Science and Venetian Intrigues* (Philadelphia: Xlibris Corporation).
Davies, P. 2001. *How to Build a Time Machine* (New York: Allen Lane).
Davis, P.J. şi Hersh, R. 1981. *The Mathematical Experience* (Boston: Birkhaüser). Ediție revăzută 1998 (Boston: Mariner Books).
Dawkins, R. 2006. *The God Delusion* (New York: Houghton Mifflin Company).
Dawson, J. 1997. *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel* (Natick, Mass: A.K. Peters).
De Morgan, A. 1885. *Newton: His Friend: and His Niece* (Londra: Elliot Stock).
De Santillana, G. 1955. *The Crime of Galileo* (Chicago: University of Chicago Press).
Dehaene, S. 1997. *The Number Sense* (Oxford: Oxford University Press).
Dehaene, S., Izard, V., Pica, P., şi Spelke, E. 2006. *Science,* 311, 381.
DeLong, H. 1970. *A Profile of Mathematical Logic* (Reading, Mass.: Addison-Wesley). Republicat 2004 (Mineola, N.Y.: Dover Publications).
Demopoulos, W. şi Clark, P. 2005. În Shapiro, S., editori *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Oxford: Oxford University Press).

Dennett, D.C. 2006. *Breaking the Spell: Religion as a Natural Phenomenon* (New York: Viking).

Descartes, R. 1637a. *Discourse on Method, Optics, Geometry, and Meteorology.* Traducere de P.J. Olscamp, 1965 (Indianapolis: The Bobbs-Merrill Company).

— . 1637b. 1954. *The Geometry of René Descartes.* Traducere de D.E. Smith şi M.L. Latham, 1954 (Mineola, N.Y.: Dover Publications).

— . 1644. *Principles of Philosophy*, II:64. În Cottingham, J., Stoothoff, R. şi Murdoch, D., editori. 1985. *Philosophical Works of Descartes* (Cambridge: Cambridge University Press).

— . 1637–1644 *The Philosophy of Descartes: Containing the Method, Meditations, and Other Works.* Traducere de J. Veitch, 1901 (New York: Tudor Publishing).

Detlefsen, M. 2005. În Shapiro, S., editor *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Oxford: Oxford University Press).

Deutsch, D. 1997. *The Fabric of Reality* (New York: Allen Lane).

Devlin, K. 1993. *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory*, ediția a doua (New York: Springer-Verlag).

— . 2000. *The Math Gene: How Mathematical Thinking Evolved and Why Numbers Are like Gossip* (New York: Basic Books).

Dijksterhuis, E.J. 1957. *Archimedes* (New York: The Humanities Press).

Doxiadis, A.K. 2000. *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture* (New York: Bloomsbury). (Ediția românească: Doxiadis, *Unchiul Pedros și conjectura lui Goldbach*, Humanitas, Bucureşti, 2005.)

Drake, S. 1978. *Galileo at Work: His Scientific Biography* (Chicago: University of Chicago Press).

— . 1990. *Galileo: Pioneer Scientist* (Toronto: University of Toronto Press).

Dummett, M. 1978. *Truth and Other Enigmas* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Dunham, W. 1994. *The Mathematical Universe: An Alphabetical Journey through the Great Proofs, Problems and Personalities* (New York: John Wiley & Sons).

Dunnington, G.W. 1955. *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science* (New York: Hafner Publishing).

Du Sautoy, M. 2008, *Symmetry: A Journey into the Patterns of Nature* (New York: Harper Collins).

Einstein, A. 1934. „Geometrie und Erführung." În *Mein Weltbild* (Frankfurt am Main: Ullstein Materialien).

Ewald, W. 1996. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (Oxford: Clarendon Press).

Favaro, A., editor 1890–1909. *Le Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale* (Florența: Barbera). Au existat mai multe ediții, cea mai recentă din 1964–66. Textul poate fi găsit la adresa http://www.imss.fi.it/istituto/index.html

Fearnley-Sander, D. 1979. *The American Mathematical Monthly,* 86(10), 809.

— . 1982. *The American Mathematical Monthly,* 89(3), 161.

Feldberg, R. 1995. *Galileo and the Church: Political Inquisition or Critical Dialogue* (Cambridge: Cambridge University Press).

Ferris, T. 1997. *The Whole Shebang* (New York: Simon & Schuster).

Finkel, B.F. 1898. „Biography: René Descartes." *American Mathematical Monthly,* 5(8–9), 191.

Fisher, R.A. 1936. *Annals of Science,* 1, 115.

— . 1956. În Newman, J.R., editor *The World of Mathematics* (New York: Simon & Schuster).

Fowler, D. 1999. *The Mathematics of Plato's Academy* (Oxford: Clarendon Press).

Franzén, T. 2005. *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse* (Wellesley, Mass.: A.K. Peters).

Frege, G. 1879. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (Halle, Germany: L. Nebert). Traducere de S. Bauer-Mengelberg in van Heijenoort, J., ed. 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

— . 1884. *Der Grundlagen der Arithmetik* (Breslau: Koebner). Traducere de J.L. Austin, 1974. *The Foundations of Arithmetic* (Oxford: Basil Blackwell).

— . 1893. *Grundgesetze der Arithmetik,* volumul I (Jena: Verlag Hermann Pohle). Parțial tradusă în 1964, în Furth, M., editor *The Basic Laws of Arithmetic* (Berkeley: University of California Press).

— . 1903. *Grundgesetze der Arithmetik,* volumul II (Jena: Verlag Hermann Pohle).

Fritz, K. von 1945. „The Discovery of Incommensurability by Hipposus of Metapontum." *Annals of Mathematics,* 46, 242.

Frova, A. și Marenzana, M. 1998. *Thus Spoke Galileo: The Great Scientist's Ideas and Their Relevance to the Present Day.* Traducere de J. McManus, 2006 (Oxford: Oxford University Press).

Galilei, G. 1586. *The Little Balance.* În *Galileo and the Scientific Revolution.* Traducere de L. Fermi și G. Bernardini. (New York: Basic Books). Aceasta e o traducere după Favaro, A., editor 1890–1909. *Le Opere di Galileo Galilei* (Florența: G. Barbera).

— . cca 1600a. *On Mechanics.* Traducere de S. Drake, 1960 (Madison: University of Wisconsin Press).
— . cca 1600b. *On Motion.* Traducere de I.E. Drabkin, 1960 (Madison: University of Wisconsin Press).
— . 1610a. *Sidereal Nuncius, or The Sidereal Messenger.* Traducere de A. Van Helden, 1989. (Chicago: University of Chicago Press).
— . 1610b. *The Sidereal Messenger* [*Sidereus Nuncius*]. În Drake, S. 1983. *Telescopes, Tides and Tactics* (Chicago: University of Chicago Press).
— . 1623. *The Assayer* [*Il Saggiatore*]. În *The Controversy on the Comets of 1618.* Traducere de S. Drake și C.D. O'Malley, 1960 (Philadelphia: University of Pennsylvania Press).
— . 1632. *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems.* Traducere de S. Drake, 1967 (Berkeley: University of California Press).
— . 1638. *Discourses on the Two New Sciences.* Traducere de S. Drake, 1974 (Madison: University of Wisconsin Press).
Garber, D. 1992. În Cottingham, J., editor *The Cambridge Companion to Descartes* (Cambridge: Cambridge University Press).
Gardner, M. 2003. *Are Universes Thicker than Blackberries?* (New York: W.W. Norton).
Gaukroger, S. 1992. În Cottingham, J., editor *The Cambridge Companion to Descartes* (Cambridge: Cambridge University Press).
— . 2002. *Descartes's System of Natural Philosophy* (Cambridge: Cambridge University Press).
Gingerich, O. 1973. „Kepler, Johannes." În Gillespie, C.C, editor *Dictionary of Scientific Biography,* vol. 7 (New York: Scribners).
Girifalco, L.A. 2008. *The Universal Force* (Oxford: Oxford University Press).
Glaisher, J.W.L. 1888. „Bicentenary Address", *Cambridge Chronicle,* 20 aprilie, 1888.
Gleick, J. 1987. *Chaos: Making a New Science* (New York: Viking).
— . 2003. *Isaac Newton* (New York: Vintage Books).
Glucker, J. 1978. *Antiochus and the Late Academy,* hypomnemata 56 (Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht).
Gödel, K. 1947). În Benaceroff, P. și Putnam, H., editori 1983. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings,* ediția a doua (Cambridge: Cambridge University Press).
Godwin, M. și Irvine, A.D. 2003. În Griffin, N., editor *The Cambridge Companion to Bertrand Russell* (Cambridge: Cambridge University Press).
Goldstein, R. 2005. *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel* (New York: W.W. Norton).
Gosling, J.C.B. 1973. *Plato* (Londra: Routledge & Kegan Paul).

Gott. J.R. 2001. *Time Travel in Einstein's Universe* (Boston: Houghton Mifflin).

Grassi, O. 1619. *Libra Astronomica ac Philosophica.* În Drake, S. și O'Malley, C.D., traducători 1960. *The Controversy on the Comets of 1618* (Philadelphia: University of Pennsylvania Press).

Graunt, J. 1662. *Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index, and Made Upon the Bills of Mortality* (Londra: Tho. Roycroft).

Gray, J.J. 2004. *János Bolyai, Non-Euclidean Geometry, and the Nature of Space* (Cambridge, Mass.: Burndy Library).

Grayling, A.C. 2005. Descartes: *The Life and Times of a Genius* (New York: Walker & Company).

Greenberg, M.J. 1974. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History,* ediția a treia (New York: W.H. Freeman and Company).

Greene, B. 1999. *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory* (New York: W.W. Norton). (Ediția românească: Greene, *Universul elegant*, Humanitas, București, 2009.)

— . 2004. *The Fabric of the Cosmos: Space, Time, and the Texture of Reality* (New York: Alfred A. Knopf).

Gross, D. 1988. *Proceedings of the National Academy of Sciences* (USA), 85, 8371.

Guthrie, K.S. 1987. *The Pythagorean Sourcebook and Library: An Anthology of Ancient Writings which Relate to Pythagoras and Pythagorean Philosophy* (Grand Rapids, Mich.: Phanes Press).

Hald, A. 1990. *A History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750* (New York: John Wiley & Sons).

Hall, A.R. 1992. *Isaac Newton: Adventurer in Thought* (Oxford: Blackwell). Retipărit în 1996 (Cambridge: Cambridge University Press).

Hamilton, E. și Cairns, H., editori 1961. *The Collected Dialogues of Plato* (New York: Pantheon).

Hamming, R.W. 1980. *The American Mathematical Monthly,* 87(2), 81.

Hankins, F.H. 1908. *Adolphe Quetelet as Statistician* (New York: Columbia University). Postat online de R.E. Wyllys la http://www.gslis.utexas.edu/-wyllys/QueteletResources/index.html

Hardy, G.H. 1940. *A Mathematician's Apology* (Cambridge: Cambridge University Press).

Havelock, E. 1963. *Preface to Plato* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Hawking, S. 2005. *God Created the Integers: The Mathematical Breakthroughs that Changed History* (Philadelphia: Running Press).

Hawking, S., editor 2007. *A Stubbornly Persistent Illusion: The Essential Scientific Writings of Albert Einstein* (Philadelphia: Running Press).

Hawking, S. și Penrose, R. 1996. *The Nature of Space and Time* (Princeton: Princeton University Press).

Heath, T.L. 1897. *The Works of Archimedes* (Cambridge: Cambridge University Press).

Heath, T. 1921. *A History of Greek Mathematics* (Oxford: Clarendon Press). Republicat în 1981 (New York: Dover Publications).

Hedrick, P.W. 2004. *Genetics of Populations* (Sudbury, Mass.: Jones & Bartlett).

Heiberg, J.L., editor 1910–15. *Archimedes Opera Omnio cum Commentarees Eutocii* (Leipzig); text în greacă și traducere în latină.

Hellman, H. 2006. *Great Feuds in Mathematics: Ten of the Liveliest Disputes Ever* (Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons).

Hermite, C. 1905. *Correspondence d'Hermite et de Stieltjes* (Paris: Gauthier-Villars).

Herodot. 440 î. Cr. *The History,* cartea III. Traducere de D. Greve, 1988 (Chicago: University of Chicago Press).

Hersh, R. 2000. *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (New York: Springer).

Herz-Fischler, R. 1998. *A Mathematical History of the Golden Number* (Mineola, N.Y.: Dover Publications).

Hobbes, T. 1651. *Leviathan.* Reeditat în 1982 (New York: Penguin Classics).

Hockett, C.F. 1960. *Scientific American,* 203 (septembrie), 88.

Höffe, O. 1994. *Immanuel Kant.* Traducere de M. Farrier (Albany, N.Y.: SUNY Press).

Hofstadter, D. 1979. *Godel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* (New York: Basic Books).

Holden, C. 2006. *Science,* 311, 317.

Huffman, C.A. 1999. În Long, A.A., editor *The Cambridge Companion to Early Greek Philosophy* (Cambridge: Cambridge University Press).

Huffman, C. 2006. „Pythagoras." În *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. http://plato.stanford.edu/entries/pythagoras

Hume, D. 1748. *An Enquiry Concerning Human Understanding.* Republicat în 2000 în *The Clarendon Edition of the Works of David Hume,* editat de T.L. Beauchamp (Oxford: Oxford University Press).

Iamblichos. cca 300 d. Cr.a. *Iamblichus' Life of Pythagoras.* Traducere de T. Taylor, 1986 (Rochester, Vt.: Inner Traditions).

— . cca 300 d. Cr.b. *On the Pythagorean Life.* Traducere de J. Dillon și J. Hershbell. (Atlanta: Scholar Press).

Irvine, A.D. 2003. „Russell's Paradox." În *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/russell-paradox

Isaacson, W. 2007. *Einstein: His Life and Universe* (New York: Simon & Schuster).

Jaeger, M. 2002. *The Journal of Roman Studies*, 92, 49.

Jeans, J. 1930. *The Mysterious Universe* (Cambridge: Cambridge University Press).

Jones, V.F.R. 1985. *Bulletin of the American Mathematical Society,* 12, 103.

Joost-Gaugier, C.L. 2006. *Measuring Heaven: Pythagoras and His Influence on Thought and Art in Antiquity and the Middle Ages* (Ithaca: Cornell University Press).

Kaku, M. 2004. *Einstein's Cosmos* (New York: Atlas Books).

Kant, I. 1781. *Critique of Pure Reason.* Una dintre numeroasele traduceri în engleză este Müller, F.M. 1881. *Immanuel Kant's Critique of Pure Reason* (Londra: Macmillan).

Kaplan, M. şi Kaplan, E. 2006. *Chances Are: Adventures in Probability* (New York: Viking).

Kapner, D.J., Cook, T.S., Adelberger, E.G., Gundlach, J.H., Heckel, B.R., Hoyle, C.D. şi Swanson, H.E. 2007. *Physical Review Letters,* 98, 021101.

Kasner, E. şi Newman, J.R. 1989. *Mathematics and the Imagination* (Redmond, Wash.: Tempus Books).

Kauffman, L.H. 2001. *Knots and Physics,* ediția a treia (Singapore: World Scientific).

Keeling, S.V. 1968. *Descartes* (Oxford: Oxford University Press).

Kepler, J. 1981. *Mysterium Cosmographicum* (New York: Abaris Books).

— . 1997. *The Harmony of the World* (Philadelphia: American Philosophical Society).

Klessinger, N., Szczerbinski, M. şi Varley, R. 2007. *Neuropsychologia,* 45, 1642.

Kline, M. 1967. *Mathematics for Liberal Arts* (Reading, Mass.: Addison-Wesley). Republicat în 1985 ca *Mathematics for the Nonmathematicians* (New York: Dover Publications).

— . 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Oxford: Oxford University Press).

Knott, C.G. 1911. *Life and Scientific Work of Peter Guthrie Tait* (Cambridge: Cambridge University Press).

Koyré, A. 1978. *Galileo Studies.* Traducere de J. Mepham (Atlantic Highlands, N.J.: Humanities Press).

Kramer, M., Stairs, I. H., Manchester, R. N. *et al.* 2006. *Science,* 314 (5796), 97.

Krauss, L. 2005. *Hiding in the Mirror: The Mysterious Allure of Extra Dimensions, from Plato to String Theory and Beyond* (New York: Viking Penguin).

Kraut, R. 1992. *The Cambridge Companion to Plato* (Cambridge: Cambridge University Press).

Krüger, L. 1987. În Krüger, L., Daston, L.J. şi Heidelberger, M., editori *The Probabilistic Revolution,* (Cambridge, Mass.: The MIT Press).

Kuehn, M. 2001. *Kant: A Biography* (Cambridge: Cambridge University Press).

Laertios, D. cca 250 d. Cr. *Lives of Eminent Philosophers.* Traducere de R. D. Hicks, 1925 (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Lagrange, J. 1797. *Théorie des Fonctions Analytiques* (Paris: Imprimerie de la République).

Lahanas, M. „Archimedes and his Burning Mirrors." www.mlahanas.de/Greeks/Mirrors.htm

Lakoff, G. şi Núñez, R.E. 2000. *Where Mathematics Comes From* (New York: Basic Books).

Laplace, P.S., Marquis de. 1814. *A Philosophical Essay on Probabilities.* Traducere de F.W. Truscot şi F.L. Emory, 1902 (New York: John Wiley & Sons). Republicat în 1995 (Mineola, N.Y.: Dover).

Lecar, M., Franklin, F.A., Holman, M.J. şi Murray, N.W. 2001. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics,* 39, 581.

Lightman, A. 1993. *Einstein's Dreams* (New York: Pantheon Books).

Little, C.N. 1899. *Transaction of the Royal Society of Edinburgh,* 39 (partea a III-a), 771.

Livio, M. 2002. *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number* (New York: Broadway Books). (Ediția românească: Livio, *Secțiunea de aur*, Humanitas, Bucureşti, 2006.)

— . 2005. *The Equation That Couldn't Be Solved* (New York: Simon & Schuster). (Ediția românească: Livio, *Ecuația care nu a putut fi rezolvată*, Humanitas, Bucureşti, 2008.)

Lottin, J. 1912. *Quetelet: Staticien et Sociologue* (Louvain: Institut Supérieur de Philosophie).

MacHale, D. 1985. *George Boole: His Life and Work* (Dublin: Boole Press Limited).

Machamer, P. 1998. În Machamer, P., editor *The Cambridge Companion to Galileo* (Cambridge: Cambridge University Press).

Manning, H.P. 1914. *Geometry of Four Dimensions* (Londra: Macmillan). Republicat în 1956 (New York: Dover Publications).

Maor, E. 1994. *e: The Story of a Number* (Princeton: Princeton University Press).

McMullin, E. 1998. În Machamer, P., editor *The Cambridge Companion to Galileo* (Cambridge: Cambridge University Press).

Mekler, S., editor, 1902. *Academicorum Philosophorum Index Herculanensis* (Berlin: Weidmann).

Menasco, W., și Rudolph, L. 1995. *American Scientist,* 83 (ianuarie–februarie), 38.

Mendel, G. 1865. „Experiments in Plant Hybridization“, http://www.mendelweb.org/Mendel.plain.html

Merton, R.K. 1993. *On the Shoulders of Giants: A Shandean Postscript* (Chicago: University of Chicago Press).

Messer, R. și Straffin, P. 2006. *Topology Now* (Washington, D.C.: Mathematical Association of America).

Miller, V.R. și Miller, R.P. editori, 1983. *Descartes, Principles of Philosophy* (Dordrecht: Reidel).

Mitchell, J.C. 1990. În van Leeuwen, J., *Handbook of Theoretical Computer Science* (Cambridge, Mass.: MIT Press).

Monk, R. 1990. *Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius* (Londra: Jonathan Cape).

Moore, G.H. 1982. *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence* (New York: Springer-Verlag).

Morgenstern, O. 1971. Draft „Memorandum from Mathematica.“ Subject: History of the naturalization of Kurt Gödel. Institute for Advanced Study, Princeton, NJ.

Morris, T. 1999. *Philosophy for Dummies* (Foster City, Calif.: IDG Books).

Motte, A. 1729. *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World.* Revizuită de F. Cajori, 1947 (Berkeley: University of California Press). Apare de asemenea ca Newton, I. 1995, *The Principia* (New York: Prometheus Books).

Mueller, I. 1991. În Bowen, A., ed. *Science and Philosophy in Classical Greece* (Londra: Garland).

— . 1992. În Kraut, R., editor *The Cambridge Companion to Plato* (Cambridge: Cambridge University Press).

— . 2005. În Koetsier, T. și Bergmans, L., editori *Mathematics and the Divine: A Historical Study* (Amsterdam: Elsevier).

Nagel, E. și Newman, J. 1959. *Gödel's Proof* (New York: Routledge & Kegan Paul). Republicat în 2001 (New York: New York University Press).

Netz, R. 2005. În Koetsier, T. și Bergmans, L., editori *Mathematics and the Divine: A Historical Study* (Amsterdam: Elsevier).

Netz, R. și Noel, W. 2007. *The Archimedes Codex: How a Medieval Prayer Book Is Revealing the True Genius of Antiquity's Greatest Scientist* (Philadelphia: Da Capo Press).

Neuwirth, L. 1979. *Scientific American,* 240 (iunie)*,* 110.

Newman, J.R. 1956. *The World of Mathematics* (New York: Simon & Schuster).

Newton, Sir I. 1730. *Opticks, or A Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light,* ediția a IV-a (Londra: G. Bell). Republicat în 1952 (New York: Dover Publications).

Newton, Sir I. 1729. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Traducere de I.B. Cohen și A. Whitman, 1999 (Berkeley: University of California Press).

Nicolson, M. 1935. *Modern Philology,* 32(3), 233.

O'Connor, J.J. și Robertson, E.F. 2003. „Peter Guthrie Tait." http://www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/ Tait.html.

— . 2005. "Hermann Günter Grassmann." http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Grassmann.html

— . 2007. "G.H. Hardy Addresses the British Association in 1922, part 1." http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/ BA_l 922_1.html

Obler, L.K. și Gjerlow, K. 1999. *Language and the Brain* (Cambridge: Cambridge University Press).

Odom, B., Hanneke, D., D'Urso, B. și Gabrielse, G. 2006. *Physical Review Letters,* 97, 030801.

Ooguri, H. și Vafa, C. 2000. *Nuclear Physics B,* 577, 419.

Orel, V. 1996. *Gregor Mendel: The First Geneticist* (New York: Oxford University Press).

Overbye, D. 2000. *Einstein in Love: A Scientific Romance* (New York: Viking).

Pais, A. 1982. *Subtle Is the Lord: The Science and Life of Albert Einstein* (Oxford: Oxford University Press).

Panek, R. 1998. *Seeing and Believing: How the Telescope Opened Our Eyes and Minds to the Heavens* (New York: Viking).

Paulos, J.A. 2008. *Irreligion: A Mathematician Explains Why the Arguments for God Just Don't Add Up* (New York: Hill and Wang).

Penrose, R. 1989. *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics* (Oxford: Oxford University Press).

— . 2004. *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe* (London: Jonathan Cape).

Perko, K.A., Jr. 1974. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 45, 262.

Pesic, P. 2007. *Beyond Geometry: Classic Papers from Riemann to Einstein* (Mineola, N.Y.: Dover Publications).

Peterson, I. 1988. *The Mathematical Tourist: Snapshots of Modern Mathematics* (New York: W.H. Freeman and Company).

Petsche, J.-J. 2006. *Grassmann* (Basel: Birkhäuser Verlag).

Pinker, S. 1994. *The Language Instinct* (New York: William Morrow and Company).

Platon. cca 360 î. Cr. *The Republic.* Traducere de A. Bloom, 1968 (New York: Basic Books).

Plutarh. cca 75 d. Cr. „Marcellus.“ Traducere de J. Dryden. În Clough, A.H., editor 1992. *Plutarch's Lives* (New York: Modern Library).

Poincaré, H. 1891. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées 2,* 769. Articolul publicat în traducere engleză în Pesic, P., 2007. *Beyond Geometry.*

Porphyrios. cca 270 d. Cr. *Life of Pythagoras.* În Hadas, M. şi Smith, M., editori 1965. *Heroes and Gods* (New York: Harper and Row).

Proclus. cca 450. *Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's „Elements“.* Traducere de G. Morrow, 1970 (Princeton: Princeton University Press).

Przytycki, J. H. 1992. Aportaciones Matemáticas Comunicaciones, 11, 173.

Putnam, H. 1975. *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers,* vol. 1 (Cambridge: Cambridge University Press), 60.

Quetelet, L.A.J. 1828. *Instructions Populaires sur le Calcul des Probabilités* (Bruxelles: H. Tarbier & M. Hayez).

Quine, W.V.O. 1966. *The Ways of Paradox and Other Essays* (New York: Random House).

Quine, W.V. 1982. *Methods of Logic,* ediția a patra. (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Radelet de Grave, P., editor 2005. „Bernoulli-Edition.“ http://www.ub.unibas.ch/spez/bernoull.htm

Ramachandran, V.S. şi Blakeslee, S. 1999. *Phantoms of the Brain* (New York: Quill).

Randall, L. 2005. *Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions* (New York: Ecco).

Raskin, J. 1998. „Effectiveness of Mathematics.“ http://jef.raskincenter.org/unpublished/effectiveness_mathematics.html

Raymond, E.S. 2005. „The Utility of Mathematics.“ http://www.catb.org/~esr/writings/utility-of-math

Redondi, P. 1998. În Machamer, P. *The Cambridge Companion to Galileo* (Cambridge: Cambridge University Press).

Rees, M.J. 1997. *Before the Beginning* (Reading, Mass.: Addison-Wesley).

Reeves, E. 2008. *Galileo's Glassworks: The Telescope and the Mirror* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Renon, L. şi Felliozat, J. 1947. *L'Inde Classique: Manuel des Etudes Indiennes* (Paris: Payot).

Rescher, N. 2001. *Paradoxes: Their Roots, Range, and Resolution* (Chicago: Open Court).

Resnik, M.D. 1980. *Frege and the Philosophy of Mathematics* (Ithaca: Cornell University Press).

Reston, J. 1994. *Galileo: A Life* (New York: HarperCollins).
Ribenboim, P. 1994. *Catalan's Conjecture* (Boston: Academic Press).
Ricoeur, P. 1996. *Synthèse,* 106, 57.
Riedweg, C. 2005. *Pythagoras: His Life and Influence.* Traducere de S. Rendall (Ithaca: Cornell University Press).
Rivest, R., Shamir, A. și Adleman, L. 1978. *Communications of the Association for Computing Machinery,* 21(2), 120.
Rodis-Lewis, G. 1998. *Descartes: His Life and Thought* (Ithaca: Cornell University Press).
Ronan, M. 2006. *Symmetry and the Monster: The Story of One of the Greatest Quests of Mathematics* (New York: Oxford University Press).
Rosenthal, J.S. 2006. *Struck by Lightning: The Curious World of Probabilities* (Washington, D.C.: Joseph Henry Press).
Ross, W.D. 1951. *Plato's Theory of Ideas* (Oxford: Clarendon Press).
Rouse Ball, W.W. 1908. *A Short Account of the History of Mathematics,* ediția a IV-a. Reeditat în 1960 (Mineola, N.Y.: Dover Publications).
Rucker, R. 1995. *Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite* (Princeton: Princeton University Press).
Russell, B. 1912. *The Problems of Philosophy* (Londra: Home University Library). Reeditat în 1997 de Oxford University Press (Oxford).
— . 1919. *Introduction to Mathematical Philosophy* (Londra: George Allen and Unwin). Reeditat în 1993 de J. Slater (Londra: Routledge). Reeditat în 2005 (New York: Barnes & Noble).
— . 1945. *History of Western Philosophy.* Reeditat în 2007 (New York: Touchstone).
Sainsbury, R.M. 1988. *Paradoxes* (Cambridge: Cambridge University Press).
Sarrukai, S. 2005. *Current Science,* 88(3), 415.
Schmitt, C.B. 1969. „Experience and Experiment: A Comparison of Zabarella's Views with Galileo's in *De Motu*". *Studies in the Renaissance,* 16, 80.
Sedgwick, W.T. și Tyler, H.W. 1917. *A Short History of Science* (New York: The Macmillan Company).
Shapiro, S. 2000. *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics* (Oxford: Oxford University Press).
Shea, W.R. 1972. *Galileo's Intellectual Revolution: Middle Period, 1610–1632* (New York: Science History Publications).
— . 1998. În Machamer, P., editor *The Cambridge Companion to Galileo* (Cambridge: Cambridge University Press).
Sieg, W. 1988. „Hilbert's Program Sixty Years Later." *Journal of Symbolic Logic*, 53, 349.

Smolin, L. 2001. *Three Roads to Quantum Gravity* (New York: Basic Books). (Ediția românească: Smolin, *Spațiu, timp, univers*, Editura Humanitas, București, 2003.)

— . 2006. *The Trouble with Physics: The Rise of String Theory, The Fall of Science, and What Comes Next* (Boston: Houghton Mifflin).

Sobel, D. 1999. *Galileo's Daughter* (New York: Walker & Company).

Sommerville, D.M.Y. 1929. *An Introduction to the Geometry of N Dimensions* (Londra: Mathuen).

Sorell, T. 2005. *Descartes Reinvented* (Cambridge: Cambridge University Press).

Sorensen, R. 2003. *A Brief History of the Paradox: Philosophy and the Labyrinths of the Mind* (Oxford: Oxford University Press).

Sossinsky, A. 2002. *Knots: Mathematics with a Twist* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Stanley, T. 1687. *The History of Philosophy,* secțiunea a IX-a. Publicat în 1970 ca facsimil sub titlul *Pythagoras: His Life and Teachings* (Los Angeles: The Philosophical Research Society).

Steiner, M. 2005. În Shapiro, S., editor *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Oxford: Oxford University Press).

Stewart, I. 2004. *Galois Theory* (Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall/CRC).

— . 2007, *Why Beauty Is Truth: A History of Symmetry* (New York: Perseus Books). (Ediția românească: Stewart, *De ce frumusețea este adevărul*, Humanitas, București, 2010.)

Stewart, J.A. 1905. *The Myths of Plato* (London: MacMillan and Co.).

Stigler, S.M. 1997. În *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, Mémoires,* 8(3), 47.

Strohmeier, J. şi Westbrook, P. 1999. *Divine Harmony* (Berkeley, Calif.: Berkely Hills Books).

Stukeley, W. 1752. *Memoirs of Sir Isaac Newton's Life.* Reeditat în 1936 (Londra: Taylor and Frances).

Summers, D.W. 1995. *Notices of the American Mathematical Society,* 42(5), 528.

Swerdlow, N. 1998. În Machamer, P., editor. *The Cambridge Companion to Galileo* (Cambridge: Cambridge University Press).

Tabak, J. 2004. *Probability and Statistics: The Science of Uncertainty* (New York: Facts on File).

Tait, P.G. 1898. În *Scientific Papers of Peter Guthrie Tait,* vol. 1 (Cambridge: Cambridge University Press).

Tait, W.W. 1996. În Hart, W. D. *The Philosophy of Mathematics* (Oxford: Oxford University Press).

Tegmark, M. 2004. În Barrow, J.D., Davies, P.C.W. și Harper, C.L. Jr., editori *Science and Ultimate Reality* (Cambridge: Cambridge University Press).

— . 2007a. „Shut Up and Calculate", arXiv 0709.4024 [hep-th].

— . 2007b. „The Mathematical Universe", arXiv 0704.0646 [gr-qc].

Tennant, N. 1997. *The Taming of the True* (Oxford: Oxford University Press).

Teon din Smirna cca 130 d. Cr. *Mathematics, Useful for Understanding Plato.* Traducere de R. Lawlor și D. Lawlor, 1979 (San Diego: Wizards Bookshelf).

Tiles, M. 1996. În Bunin, N și Tsui-James, E.P., editori. *The Blackwell Companion to Philosophy* (Oxford: Blackwell Publishing).

Todhunter, I. 1865. *A History of the Mathematical Theory of Probability* (Cambridge: Macmillan and Co.).

Toffler, A. 1970. *Future Shock* (New York: Random House).

Trudeau, R.J. 1987. *The Non-Euclidean Revolution* (Boston: Birkhauser).

Truesdell, C. 1960. *The Rotational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638–1788, Leonhardi Euler Opera Omnia,* ser. II, vol. 11, partea a doua (Zürich: Orell Füssli).

Turnbull, H.W., Scott, J.F., Hall, A.R. și Tilling, L., editori. 1959–77. *The Correspondence of Isaac Newton* (Cambridge: Cambridge University Press).

Urquhart, A. 2003. În Griffin, N., editor. *The Cambridge Companion to Bertrand Russell* (Cambridge: Cambridge University Press).

Vafa, C. 2000. În Arnold, V., Atiyah, M., Lax, P. și Mazur, B., editori. *Mathematics: Frontiers and Perspectives* (Providence, R.I.: American Mathematical Society).

Van der Waerden, B.L. 1983. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations* (Berlin: Springer-Verlag).

Van Heijenoort, J., editor 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Van Helden, A. 1996. *Proceedings of the American Philosophical Society,* 140, 358.

Van Helden, A. și Burr, E. 1995. The Galileo Project, http://galileo.rice.edu/index.html

Van Stegt, W. P. 1998. În Mancosu, P., editor *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s* (Oxford: Oxford University Press).

Vandermonde, A. T. 1771. *L'Histoire de I'Académie des Sciences avec les Mémoires* (Paris: Mémoires de I'Académie Royale des Sciences).

Varley, R., Klessinger, N., Romanowski, C. și Siegal, M. 2005. *Proceedings of the National Academy of Sciences* (USA), 102, 3519.

Vawter, B. 1972. *Biblical Inspiration* (Philadelphia: Westminster).
Vilenkin, A. 2006. *Many Worlds in One: The Search for Other Universes* (New York: Hill and Wang).
Vitruviu, M.P. secolul I î. Cr. *De Architectura.* În Rowland, I.D. şi Howe, T. N., editori. 1999. *Ten Books on Architecture* (Cambridge: Cambridge University Press).
Vlastos, G. 1975. *Plato's Universe* (Seattle: University of Washington Press).
Von Gebler, K. 1879. *Galileo Galilei and the Roman Curia.* Traducere de J. Sturge. Reeditată în 1977 (Merrick, N.Y.: Richwood Publishing Company).
Vrooman, J. R. 1970. *René Descartes: A Biography* (New York: Putnam).
Waismann, F. 1979. *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle; Conversations Recorded by Friedrich Waismann.* Editată de B. McGuinness; traducere de J. Schulte şi B. McGuinness (Oxford: Basel Blackwell).
Wallace, D.F. 2003. *Everything and More: A Compact History of Infinity* (New York: W.W. Norton).
Wallechinsky, D. şi Wallace, I. 1975–81. „Biography of Scottish Child Prodigy Marjory Flemming, part 1." http://www.trivia-library.eom/b/biography-of-scottish-child-prodigy-marjory-fleming-part-1.htm
Wallis, J. 1685. *Treatise of Algebra.* Citat în Manning, H.P. 1914. *Geometry of Four Dimensions* (Londra: Macmillan).
Wang, H. 1996. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy* (Cambridge, Mass.: MIT Press).
Washington, G. 1788. Scrisoare către Nicholas Pike, 20 iunie, 1788. În Fitzpatrick, J.C. editor. 1931–44. *Writings of George Washington* (Washington, D.C.: Government Printing Office). Citat în Deutsch, K.L. şi Nicgorski, W., editori 1994. *Leo Strauss: Political Philosopher and Jewish Thinker* (Lanham, Md.: Rowman & Littlefield).
Wasserman, S.A. şi Cozzarelli, N.R. 1986. *Science,* 232, 951.
Watson, R. 2002. *Cogito, Ergo Sum: The Life of René Descartes* (Boston: David R. Godine).
Weinberg, S. 1993. *Dreams of a Final Theory* (New York: Pantheon Books).
Wells, D. 1986, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers* (Londra: Penguin). Ediție revizuită 1997.
Westfall, R.S. 1983. *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton* (Cambridge: Cambridge University Press).
Whiston, W. 1753. *Memoirs of the Life and Writings of Mr. William Whiston, Containing, Memoirs of Several of His Friends Also,* ediția a doua (Londra: Tipărit pentru J. Whiston şi B. White).
White, L.A. 1947. *Philosophy of Science,* 14(4), 289.
White, N.P. 1992. În Kraut, R., editor *The Cambridge Companion to Plato* (Cambridge: Cambridge University Press).

Whitehead, A.N. 1911. *An Introduction to Mathematics* (Londra: Williams & Norgate). Reeditat 1992 (Oxford: Oxford University Press).

— . 1929. *Process and Reality: An Essay in Cosmology.* Reeditat în 1978 de D.R. Griffin şi D.W. Sherburne (New York: Free Press).

Whitehead, A. N. şi Russell, B. 1910. *Principia Mathematica* (Cambridge: Cambridge University Press). Ediția a doua 1927.

Wigner, E.P. 1960. *Communications in Pure and Applied Mathematics,* vol. 13, nr. 1. Reeditat în Saatz, T.L. şi Weyl, F.J., editori 1969. *The Spirit and the Uses of the Mathematical Sciences* (New York: McGraw Hill).

Wilczek, F. 2006. *Physics Today,* 59 (noiembrie), 8.

— . 2007. *Physics Today,* 60 (mai), 8.

Witten, E. 1989. *Communications in Mathematical Physics,* 121, 351.

Wolfram, S. 2002. *A New Kind of Science* (Champaign, 111.: Wolfram Media).

Wolterstorff, N. 1999. În Sorell, T., editor *Descartes* (Dartmouth: Ashgate).

Woodin, W.H. 2001a. *Notices of the American Mathematical Society,* 48(6), 567.

— . 2001b. *Notices of the American Mathematical Society,* 48(7), 681.

Wright, C. 1997. În Heck, R., editor *Language, Thought, and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett,* (Oxford: Oxford University Press).

Zalta, E.N. 2005. „Gottlob Frege". *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http.7/plato.stanford.edu/entries/frege/

— . 2007. „Frege's Logic, Thoerem, and Foundations for Arithmetic." *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/frege-logic/

Zweibach, B.A. 2004. *A First Course in String Theory* (Cambridge: Cambridge University Press).

Credite fotografice

Autorul și editorul își exprimă gratitudinea pentru permisiunea de a reproduce materiale următoarelor persoane și instituții:

Ilustrații

Figurile 1, 2, 6, 14, 15, 17, 19, 24, 25, 54, 55, 56, 60, 61: Ann Feild.

Figurile 3, 28, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 46, 62, 63, 64, 65: Krista Wildt.

Figura 4: © Scott Adams/Dist. United Feature Syndicate, Inc.

Figurile 7, 10, 11, 16, 21, 26, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53: Biblioteca Speciale di Matematica „Giuseppe Peano“ cu sprijinul Laurei Garbolino.

Figurile 8, 27: autorul.

Figura 9: Bibliothèque nationale de France, département de la reproduction.

Figura 12: Will Noel și Archimedes Palimpsest Project.

Figura 13: Roger L. Easton.

Figurile 18, 20: Colecție particulară dr. Elliott Hinkes. Prin amabilitatea Bibliotecii Milton S. Eisenhower, Universitatea Johns Hopkins.

Figura 22: Roger-Viollet, Paris, Franța.

Figura 23: Sofie Livio.

Figura 29: Biblioteca Universității din Chicago, Joseph H. Schaffner.

Figurile 30, 32: Biblioteca Milton S. Eisenhower, Universitatea Johns Hopkins.

Figura 38: Biblioteca Academiei de Ştiinţe din Torino, prin amabilitatea Laurei Garbolino.

Figura 58: Stacey Benn.

Figura 59: Steven Wasserman.

Cuprins

Prefață 7

Capitolul 1
Misterul 11

Capitolul 2
Misticii: Numerologul și filozoful 25

Capitolul 3
Magicienii: Maestrul și ereticul 53

Capitolul 4
Magicienii: Scepticul și uriașul 99

Capitolul 5
Statisticienii și probabiliștii: Știința incertitudinii 134

Capitolul 6
Geometrii: Șocul viitorului 168

Capitolul 7
Logicienii: Reflecție asupra raționamentului 191

Capitolul 8
Eficacitate imprevizibilă? 224

Capitolul 9
Despre mintea umană, matematică și univers 248

Note 279

Bibliografie 299

Credite fotografice 319